Cattedra Enrico Fermi 2015-2016

La teoria delle stringhe:
l'ultima rivoluzione in fisica?

Gabriele Veneziano

Lezione # 9.1: 07.04.2016

La stringa come relatività generale in 2 D
Stringhe classiche e quantistiche

Complementi tecnici (seconda ora)

1. Equivalenza delle due formulazioni
2. I vincoli nella formulazione di Polyakov.
3. Algebra classica dei vincoli
4. Aggiunta di cariche nella formulazione di Polyakov
5. Quantizzazione:
   - Quantizzazione sul cono luce
   - Quantizzazione alla Polyakov (solo note)
   - Quantizzazione alla BRST (solo note)

Il punto materiale relativistico come relatività generale in una dimensione (temporale)

L'azione del punto materiale relativistico con massa:

$$S_p = -mc\int ds = -mc\int d\tau\sqrt{-\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}g_{\mu\nu}(x(\tau))}$$

non è utilizzabile per m = 0.

Esiste una formulazione che copre entrambi i casi utilizzando un campo supplementare "e(τ)" che gioca il ruolo della metrica (in effetti di un :"einbein": $e^2 = -g_{00}$) in una RG in 1-D.

$$\tilde{S}_p = \frac{1}{2}\int d\tau\,\left(e^{-1}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x) - e\,m^2\right)$$

Usando l'e.d.m. per "e":

$$e^2 = -\frac{1}{m^2}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x)$$

e sostituendolo nell'azione si verifica facilmente l'equivalenza classica delle due formulazioni (seconda ora).

$$\tilde{S}_p = \frac{1}{2}\int d\tau\, (e^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x) - e\ m^2)$$

Due osservazioni:

1. Non c'è più la radice quadrata (sempre una rogna…)

2. L'invarianza sotto riparametrizzazioni ($\tau \to \tau'(\tau)$) è ora vista proprio come in RG. E' assicurata dall'associarvi una trasformazione della "e" in modo tale che $e\, d\tau$ sia invariante, proprio come si farebbe in RG.

3. Si verifica facilmente che $p^2 = - m^2$ (seconda ora)

La stringa relativistica come relatività generale in 2-D

Formulazione alla Polyakov della stringa bosonica

Polyakov, estendendo lavori precedenti, ha preso come punto di partenza l'azione:

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\xi\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X)$$

ove $\gamma_{\alpha\beta}(\xi)$ è una "metrica" in 2D le cui e.d.m. sono:

$$\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\left[\gamma^{\gamma\delta}\partial_\gamma X^\mu\partial_\delta X^\nu G_{\mu\nu}(X)\right] = 0$$

Queste danno per $\gamma_{\alpha\beta}$ l'espressione che avevamo scritto per l'azione di NG (dove $\gamma_{\alpha\beta}$ NON era un campo independente):

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^{\mu}(\xi)}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X^{\nu}(\xi)}{\partial \xi^{\beta}} G_{\mu\nu}(X(\xi))$$

a meno di un fattore "conforme" $C^2(\sigma, \tau)$. Inserendo questa espressione in S_P si ritrova l'azione di NG (vedi seconda ora):

$$S_{NG} = -T \int d^2\xi \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}$$

con $\gamma_{\alpha\beta}$ definito dall'equazione precedente.

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\xi\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X)$$

Osservazioni:

1. Non c'è più la radice quadrata (per la parte con la X);

2. L'invarianza sotto riparametrizzazioni di σ e τ ($\tau \to \tau'(\tau,\sigma)$, $\sigma \to \sigma'(\tau,\sigma)$) è ora assicurata dall'associarvi una trasformazione della $\gamma_{\alpha\beta}(\tau,\sigma)$ proprio come si fa in RG.

3. Invarianza sotto trasformazioni conformi di $\gamma_{\alpha\beta}$

4. I due vincoli si possono facilmente ritrovare in questa formulazione (seconda ora).

Aggiunta di cariche (seconda ora?)

L'interazione del punto carico con un campo elettromagnetico:

$$\tilde{S}_p = \frac{1}{2}\int d\tau\,\left(e^{-1}\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu g_{\mu\nu}(x) - e\, m^2\right) - q\int d\tau \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x)$$

non necessita l'introduzione di "e".

Analogamente si può aggiungere a S_P l'interazione con un tensore anti-simmetrico $B_{\mu\nu}$ e si ottiene (avendo assorbito qualche fattore in G):

$$S_P = \int d^2\xi \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \left[\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(X)\right]$$

Si vede come quest'ultimo non necessiti l'introduzione di $\gamma_{\alpha\beta}$. Notare come altrimenti G e B entrino in modo simile nell'azione.

Per interpretare l'azione di Polyakov in termini di una stringa e' essenziale preservare, al livello quantistico, le simmetrie locali (in 2D) presenti nella teoria classica (in gergo, si deve imporre l'assenza di anomalie).

Queste sono:

1. l'invarianza per riparametrizzazioni di σ e τ

2. l'invarianza per riscalamento "locale" della metrica $\gamma_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\alpha\beta} \to C^2(\sigma, \tau)\gamma_{\alpha\beta}$$

Dato che $\gamma_{\alpha\beta}$ ha 3 componenti è possibile fissarla usando 1&2.

La 1. essenzialmente non da restrizioni (NB: per il punto materiale c'e' solo 1 e infatti non ci sono restrizioni).

Viceversa la 2. pone condizioni niente affatto banali!

Recupero dei vincoli classici nella formulazione alla Polyakov (seconda ora)

Equazioni del moto, gauge conforme

Le e.d.m. di $\gamma_{\alpha\beta}$ correspondono, per definizione, a mettere a zero il tensore energia-impulso in 2-D:

$$T_{\alpha\beta} \sim \frac{\delta S}{\delta \gamma^{\alpha\beta}} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma X^\mu \partial^\gamma X^\nu G_{\mu\nu} = 0$$

Le e.d.m. per le X sono, in generale non lineari:

$$\Box X^\mu \sim \partial_\alpha \left(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu\right) = 0$$

Si linearizzano nel cosiddetto gauge conforme in cui $\gamma_{\alpha\beta}$ è conformemente piatto:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \exp(2\rho)\eta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag.}(-1, 1)$$

ovvero in variabili di cono luce, $\sigma \pm \tau$,

$$\gamma_{++} = \gamma_{--} = 0 \quad ; \quad \gamma_{+-} = \exp(2\rho)$$

In questo caso si ritrova l'equazione di d'Alembert come nel gauge ON for per l'azione di NG.

In questo gauge:

$$T_{\alpha\beta} \sim \frac{\delta S}{\delta \gamma^{\alpha\beta}} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma X^\mu \partial^\gamma X^\nu G_{\mu\nu} = 0$$

da direttamente i due vincoli (la traccia da un'identità):

$$T_{++} \sim \partial_+ X^\mu \partial_+ X^\nu G_{\mu\nu} = 0 \; ; \; T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X^\nu G_{\mu\nu} = 0$$

Che sono gli stessi di:

$$\begin{aligned} \dot{X}^2 + X'^2 &\equiv -(\dot{X}_0)^2 + (\dot{X}_i)^2 - (X_0')^2 + (X_i')^2 = 0 \\ \dot{X} \cdot X' &= 0 \quad , \quad \text{i.e.} \;\; (\dot{\mathrm{X}} \pm \mathrm{X}')^2 = 0 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo procedere con il metodo di quantizzazione canonica.

Soluzione generale di $\ddot{X}_\mu = X''_\mu$ e delle c.a.b.

Stringhe aperte di Neumann ($X'_\mu(\sigma=0, \pi) = 0$). ($2\pi\alpha' = 1/T$)

$$X_\mu(\sigma,\tau) = q_\mu + 2\alpha' p_\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{-in\tau} - \frac{a^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{in\tau} \right] cos(n\sigma)$$

Stringhe chiuse in spazio top. banale ($X_\mu(\sigma=0) = X_\mu(\sigma=\pi)$)

$$\begin{aligned} X_\mu(\sigma,\tau) &= q_\mu + 2\alpha' p_\mu \tau + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{-2in(\tau-\sigma)} - \frac{a^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{2in(\tau-\sigma)} \right] \\ &+ \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{a}_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{-2in(\tau+\sigma)} - \frac{\tilde{a}^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}} e^{2in(\tau+\sigma)} \right] \end{aligned}$$

Con queste normalizzazioni la quantizzazione implica le regole di commutazione standard di q e p e quelle di un set infinito di osc. armonici disaccoppiati per le a e a+

A queste vanno aggiunte le condizioni (di Virasoro)

$$\begin{aligned} \dot{X} \cdot X' &= 0 \\ \dot{X}^2 + X'^2 &\equiv -(\dot{X}_0)^2 + (\dot{X}_i)^2 - (X_0')^2 + (X_i')^2 = 0 \end{aligned}$$

viste ora come operatori che devono annichilare gli stati fisici.

Gli operatori stessi vanno definiti in modo che siano finiti ed e' proprio qui che le pericolose "anomalie" possono sbucare.

Contrasto fra finitezza e simmetria: ecco da dove scaturiscono i vincoli su D e α_0 (seconda ora)!

Stringhe classiche e quantistiche

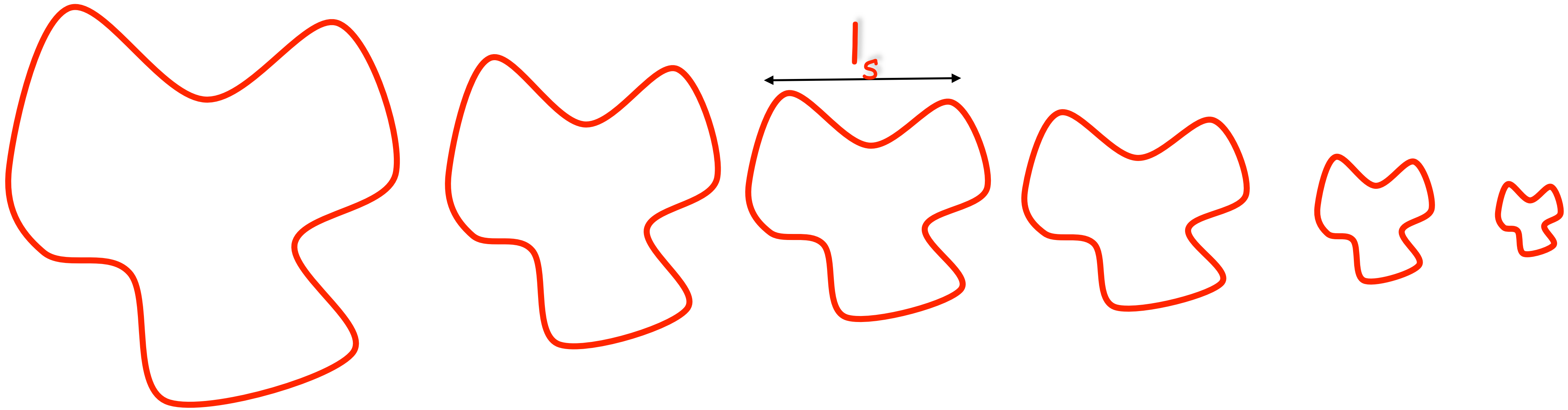
- Abbiamo già menzionato le condizioni sulle dimensioni dello spazio in cui una stringa quantizzata può muoversi senza problemi.
- Abbiamo anche visto che lo spettro della stringa quantizzata è vincolato ($\alpha_0=1$).
- Questi sono solo due esempi di come stringhe quantistiche si comportino diversamente dalle loro analoghe classiche.
- Nel seguito troveremo varie altre differenze rilevanti ma, per il momento, soffermiamoci su due d'importanza cruciale.

Emergenza di una scala caratteristica di lunghezza/tempo

- La stringa classica in Minkowski non contiene una scala caratteristica di lunghezze. La tensione T è solo una costante di conversione (Cf. G_N, k_B).
- Data una soluzione delle e.d.m. e dei vincoli possiamo generarne infinite altre moltiplicando tutte le coordinate per un fattore k arbitrario (= invarianza di scala in D-dimensioni)
- La nuova soluzione ha M(J) k volte (k^2 volte) più grande. Il rapporto $\alpha' = J/M^2$ resta invariato.
- Si può anche riscalare T => solo un cambiamento della relazione fra massa e lunghezza.

- Tramite un riscalamento della X si può rendere una stringa classica arbitrariamente leggera mentre il suo momento angolare diviene arbitrariamente piccolo.
- NB. Questa invarianza di scala è rotta se la stringa si muove in uno spazio-tempo non banale che contiene, lui stesso, una scala di lunghezze R (ad.es. un raggio di Hubble o di Schwarzschild).
- In quel caso possiamo solo riscalare simultaneamente la taglia della stringa L e R. Il loro rapporto è un parametro senza dimensioni rilevante: stringhe grandi o piccole (rispetto a R) si comportano, in generale, molto diversamente.

Stringhe classiche divengono sempre più leggere quanto più le facciamo contrarre.



T va visto piuttosto come fattore di conversione fra lunghezza e massa di una stringa (Cf. k_B).

Al livello quantistico la quantità rilevante è S/h. Dato che:

$$\frac{1}{\hbar} S_{NG} = -\frac{T}{\hbar}(\text{Area swept}) \equiv -\frac{1}{\pi l_s^2}(\text{Area swept}) \quad ; \quad l_s^2 \equiv 2\alpha' \hbar$$

la quantizzazione della stringa introduce una lunghezza fondamentale, l_s. Il rapporto fra l'estensione di una corda generica L e l_s diviene ora un parametro adimensionale rilevante. Si puo' parlare di corde grandi o piccole in senso assoluto. (anche in Minkowski: in spazi-tempi curvi ci saranno altri rapporti di scale rilevanti).

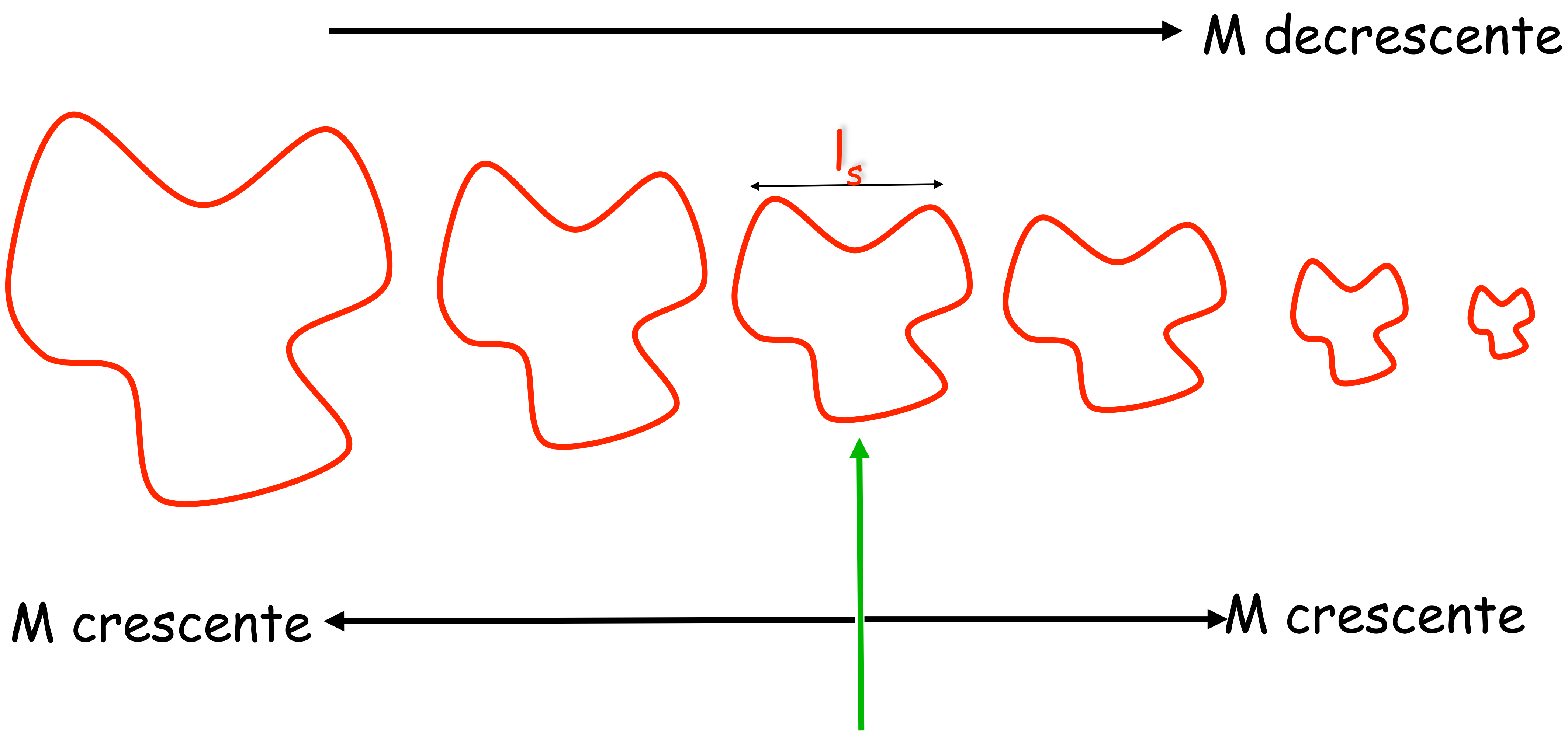
$$\frac{1}{\hbar}S_{NG} = -\frac{T}{\hbar}(\text{Area swept}) \equiv -\frac{1}{\pi l_s^2}(\text{Area swept}) \quad ; \quad l_s^2 \equiv 2\alpha'\hbar$$

Questo quanto fondamentale di lunghezza entra nella teoria quantistica delle stringhe in vari modi.

Fisicamente determina l'estensione caratteristica di una stringa di minima energia/massa nello stesso modo in cui vi è un certo Δx finito nello stato fondamentale di un oscillatore armonico. L'analogia è praticamente perfetta. Ambedue vanno come $h^{1/2}$.

NB: In letteratura l_s^2 e $2\alpha'$ non vengono usualmente distinte (dato che si usano unità h = c =1) ma talvolta è utile fare la distinzione.

Stringhe classiche divengono sempre più leggere quanto più le facciamo contrarre.



le stringhe quantistiche più leggere hanno taglia l_s.

- Tenendo conto del fatto che abbiamo già usato $c = 1$ possiamo dire che la quantizzazione della stringa relativistica contiene solo due costanti fondamentali con dimensioni (in corrispondenza di due principi primi: relatività e meccanica quantistica) c ed l_s ovvero una lunghezza e un tempo.
- Ho sostenuto (e ancora sostengo) che neppure h è necessaria essendo legata semplicemente al nostro sistema storico di unità c.g.s (o m.k.s.).
- Le unità di misura della stringa sono naturalmente geometriche (energie misurate in unità di lunghezza) e dunque $h \sim E\, t \sim l\, t \sim l^2$
- Questo mio punto di vista è stato conteso (si veda ad esempio JHEP 0203 (2002) 023, arXiv:physics/0110060).

Violazione del limite classico su J/M^2

Come abbiamo visto una stringa classica non può avere momento angolare senza avere un'estensione (e dunque una massa) finita. La bacchetta rigida massimizza J/M^2. Viceversa, una stringa quantistica può avere fino a due unità di J senza acquistare massa. Chiaramente un effetto quantistico:

dopo regolarizzazione

$$\frac{M^2}{2\pi T} \geq J + \hbar \sum_1^\infty \frac{n}{2} = J - \alpha_0 \hbar \qquad \alpha_0 = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2.$$

dove i valori seminteri sorgono quando si considera la superstringa.

Il limite classico delle stringhe è dunque quello in cui la loro estensione, massa e spin sono grandi in unità l_s. In questa regione i due grafici tendono ad accordarsi.

Viceversa, per le stringhe più leggere la descrizione classica fallisce. Dato che questi stati a massa nulla e con spin sono necessari per avere le forze del MS e della RG solo stringhe quantizzate possono servire per una teoria unificata di tutte le interazioni