Cattedra Enrico Fermi 2015-2016

La teoria delle stringhe: l'ultima rivoluzione in fisica?

Gabriele Veneziano

Lezione # 8.1: 31.03.2016

Punti materiali e stringhe relativistiche classiche: analogie e differenze

Particella puntiforme, relativistica con massa in un campo gravitazionale

Volendo trattare in modo simmetrico spazio e tempo descriviamo i possibili moti della particella dando le sue coordinate spazio-temporali $x^\mu(\tau)$ come funzioni di un parametro arbitrario τ. (μ = 0, 1, ... D-1).

Il moto classico (particella libera in campo gravitazionale) minimizza la lunghezza (o la durata) del cammino percorso.

Questo ci restringe ad un unica forma di azione:

$$S_p = -mc \int ds = -mc \int d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} g_{\mu\nu}(x(\tau))}$$

Dunque l'azione è proporzionale alla lunghezza (propria) della "linea-universo" percorsa dalla particella. La costante di proporzionalità è la massa m (moltiplicata per c).

Notare l'invarianza di S_p sotto il cambiamento di τ in $\tau'(\tau)$.
La fisica non può dipendere da quella scelta. Prendiamo ad es. $\tau = t$...

Questa azione perde di significato (va a zero) per una particella senza massa.

Vedremo come trattare quel caso quando discuteremo una diversa formulazione della stringa.

L'azione della stringa che daremo fra poco è invece parente stretta di quella appena scritta per il punto materiale con massa.

La stringa classica nella formulazione alla Nambu-Goto

L'idea (a posteriori) è banale: generalizzare il concetto di cammino geodetico (di lunghezza minima) a quello di superficie geodetica (cioè di area minima).

Nambu (e indipendentemente Goto) proposero un'azione proporzionale all'area della superficie spazzata dalla stringa nel suo moto.

Il moto e' ora parametrizzato dando le coordinate spazio-temporali $X^{\mu}(\sigma, \tau)$ in termini di due parametri, σ, τ, con:

$\mu = 0, 1, \ldots D-1$; $0 < \sigma < \pi$ (per convenzione), τ libero. σ parametrizza i vari punti della stringa che può avere o no due estremità (risp. stringhe aperte o chiuse).

Imponendo che l'azione sia invariante rispetto a riparametrizzazioni di σ e τ fa si che, come nel caso del punto materiale, la sua forma sia completamente fissata a parte una costante moltiplicativa.

NG discussero il caso di uno spazio-tempo Minkowskiano ($g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x)$) ma, come per la particella, la construzione si generalizza facilmente al caso di una metrica $G_{\mu\nu}(x)$ arbitraria. Il risultato (matematicamente noto) è il seguente:

$$S_{NG} = -T \int d(Area) = -T \int d^2\xi \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}} \equiv -T \int d\xi^0 \int_0^\pi d\xi^1 \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}$$

dove $\gamma_{\alpha\beta}$ è la "metrica indotta" (seconda ora)

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu(\xi)}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}(X(\xi)) \ , \quad \alpha, \beta = 0, 1 \quad , \quad \xi^0 = \tau, \ \xi^1 = \sigma$$

La costante che moltiplica l'area, T, è la cosiddetta tensione della stringa. Ha dimensioni di energia per unità di lunghezza (se l'area e' misurata in unita' di lunghezza x tempo, ma noi usiamo unità in cui c=1)

Differenze importanti fra punti e stringhe classiche:

1. Per particelle puntiformi possiamo aggiungere all'azione già scritta altri termini che descrivono particelle di massa diversa non interagenti fra di loro. In tal modo aggiungiamo anche molti parametri rilevanti liberi (i rapporti fra le masse di particelle diverse).

2. Possiamo poi aggiungere a mano varie interazioni: esse sono piuttosto arbitrarie e non così facili da scrivere se vogliamo evitare l'uso di campi (ad esempio quello gravitazionale).

Vedremo che per la stringa la situazione è totalmente diversa: c'e' un'unica costante, la tensione T, e inoltre le interazioni saranno incluse automaticamente in un modo "geometrico"!

I vincoli classici (seconda ora)

L'invarianza di S_p sotto riparametrizzazioni di τ ($\tau \to \tau'(\tau)$) genera 1 vincolo (facilmente verificabile):

$$p_\mu(\tau) \equiv \frac{\delta S_p}{\delta \dot{x}^\mu(\tau)} \Rightarrow p_\mu(\tau) p_\nu(\tau) g^{\mu\nu}(x(\tau)) = -m^2$$

Analogamente, l'invarianza di S_{NG} sotto riparametrizzazioni del tipo $\xi^\alpha \to \xi'^\alpha(\xi^\alpha)$

genera 2 vincoli (nuovamente di facile verifica):

$$\begin{aligned} P_\mu(\xi) &\equiv \frac{\delta S_{NG}}{\delta \dot{X}^\mu(\xi)} \Rightarrow P_\mu(\xi) X'^\mu(\xi) = 0 \\ & P_\mu(\xi) P_\nu(\xi) G^{\mu\nu}(X(\xi)) + T^2 X'^\mu(\xi) X'^\nu(\xi) G_{\mu\nu}(X(\xi)) = 0 \\ \dot{X}^\mu(\xi) &\equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \xi^0}, \quad X'^\mu(\xi) \equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \xi^1} \end{aligned}$$

Stringhe in Minkowski: equazioni del moto

Il moto classico della stringa (e ancor più la sua quantizzazione) è già non banale nello spazio-tempo piatto. Consideriamo per ora quel caso pur tenendo D arbitrario.

$$S_{NG} = -T \int d^2\xi \sqrt{-det\gamma_{\alpha\beta}}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu(\xi)}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}(X(\xi)) \ , \quad \alpha, \beta = 0, 1 \quad , \quad \xi^0 = \tau, \ \xi^1 = \sigma$$

diviene:

$$S_{NG} = -T \int d^2\xi \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

$$\dot{X}^\mu(\xi) \equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \tau} \ , \quad X'^\mu(\xi) \equiv \frac{\partial X^\mu(\xi)}{\partial \sigma}$$

Prodotto di Lorentz sottinteso

Una scelta conveniente delle coordinate

Nello spazio tempo piatto le e.d.m. del punto materiale sono banali mentre per la stringa sembrano a prima vista molto complicate (seconda ora):

Si possono però semplificare moltissimo usando la libertà nella scelta delle coordinate (σ, τ). Questa permette di imporre due utili condizioni (= *gauge ortonormale*)

$$
\begin{aligned}
\dot{X}^2 + X'^2 &\equiv -(\dot{X}_0)^2 + (\dot{X}_i)^2 - (X'_0)^2 + (X'_i)^2 = 0 \\
\dot{X} \cdot X' &= 0 \quad , \quad \text{i.e.} \;\; (\dot{\mathrm{X}} \pm \mathrm{X}')^2 = 0
\end{aligned}
$$

Le e.d.m. divengono quelle di un onda in una dimensione spaziale

$$\ddot{X}_\mu = X''_\mu$$

con soluzione generale: $X_\mu(\sigma, \tau) = F_\mu(\tau - \sigma) + G_\mu(\tau + \sigma)$

Condizioni ai bordi (+ seconda ora)

Differiscono in modo sostanziale per stringhe aperte e chiuse.

Per le stringhe chiuse i punti $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$ sono fisicamente lo stesso punto. Quindi dobbiamo imporre $X^\mu(0, \tau) = X^\mu(\pi, \tau)$ (a meno che, come vedremo, lo spazio non sia topologicamente non banale)

Per stringhe aperte abbiamo due opzioni (che si possono applicare indipendentemente sulle diverse coordinate):

Neumann b.c. $$X'^\mu = 0 \quad , \qquad \sigma = 0, \pi$$

Dirichlet b.c. $$\dot{X}^\mu = 0 \quad , \qquad \sigma = 0, \pi$$

Per il momento ci limiteremo al caso di Neumann

Soluzione generale di $\ddot{X}_\mu = X''_\mu$ e delle c.a.b.

Stringhe aperte di Neumann ($X'_\mu(\sigma=0, \pi) = 0$). Def. $2\pi\alpha' = 1/T$

$$X_\mu(\sigma,\tau) = q_\mu + 2\alpha' p_\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{-in\tau} - \frac{a^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{in\tau}\right] cos(n\sigma)$$

(i coefficienti arbitrari sono così definiti per semplificare le formule quando quantizzeremo)

Stringhe chiuse in spazio top. banale ($X_\mu(\sigma=0) = X_\mu(\sigma=\pi)$)

$$\begin{aligned} X_\mu(\sigma,\tau) &= q_\mu + 2\alpha' p_\mu \tau + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{-2in(\tau-\sigma)} - \frac{a^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{2in(\tau-\sigma)}\right] \\ &+ \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\tilde{a}_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{-2in(\tau+\sigma)} - \frac{\tilde{a}^*_{n,\mu}}{\sqrt{n}}e^{2in(\tau+\sigma)}\right] \end{aligned}$$

a cui vanno aggiunte

$$\begin{aligned} \dot{X}\cdot X' &= 0 \\ \dot{X}^2 + X'^2 &\equiv -(\dot{X}_0)^2 + (\dot{X}_i)^2 - (X'_0)^2 + (X'_i)^2 = 0 \end{aligned}$$

La soluzione classica più semplice: la bacchetta rigida che ruota

Eq. del moto: $$\ddot{X}_\mu = X''_\mu$$

vincoli:

$$\begin{aligned} \dot{X} \cdot X' &= 0 \\ \dot{X}^2 + X'^2 &\equiv -(\dot{X}_0)^2 + (\dot{X}_i)^2 - (X'_0)^2 + (X'_i)^2 = 0 \end{aligned}$$

condizioni ai bordi: $X'_\mu(\sigma = 0, \pi) = 0 \Rightarrow \sum_i \left(\frac{dX_i}{dX_0}\right)^2 (\sigma = 0, \pi) = 1$

Dunque le estremità si muovono a velocità c. Una soluzione:

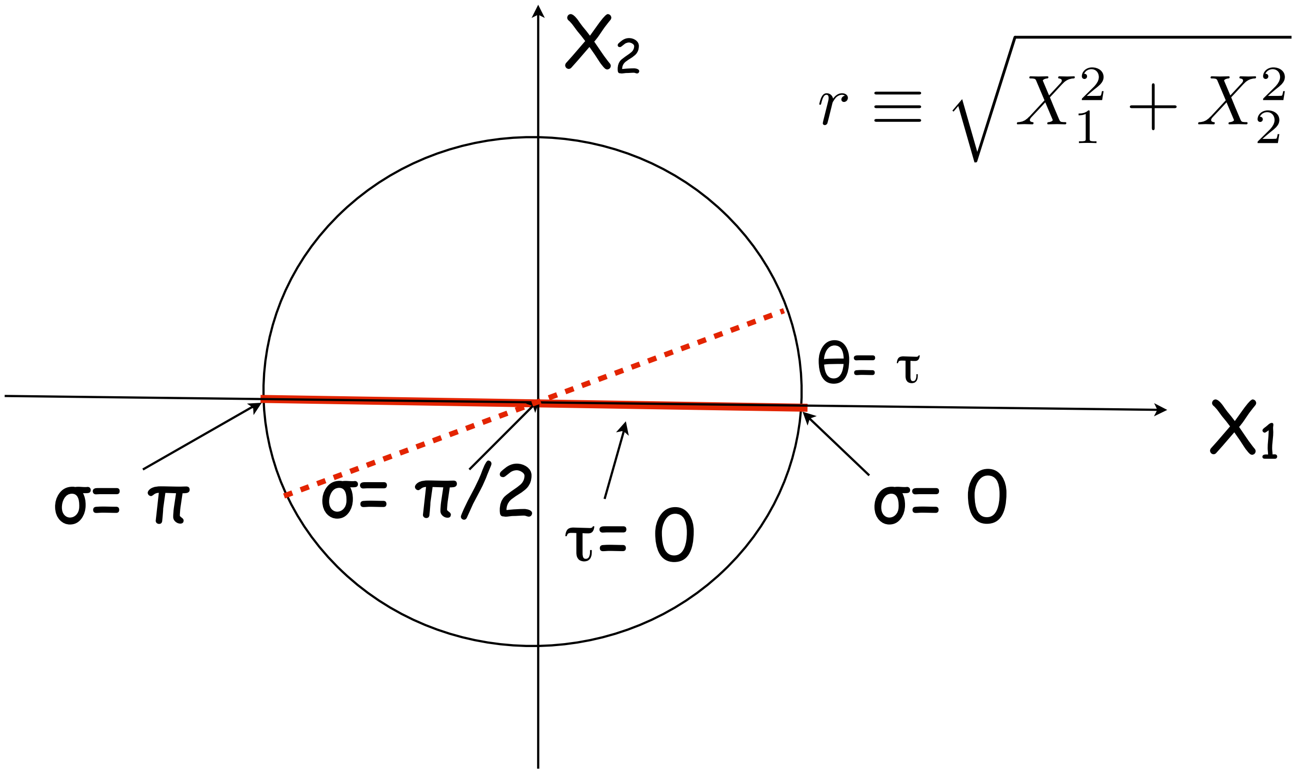
$$X_0 = A\tau \quad ; \quad X_1 = A\, cos\tau\ cos\sigma\ ,\ X_2 = A\, sin\tau\ cos\sigma$$

$$X_i = 0 \ , \quad (i = 3, 4, \ldots D-1)$$

e.d.m., vincoli, c.a.b. si possono facilmente verificare!

$$X_0 = A\tau \quad ; \quad X_1 = A\ cos\tau\ cos\sigma\ ,\ X_2 = A\ sin\tau\ cos\sigma$$

$$X_i \quad = \quad 0 \quad , \quad (i = 3, 4, \ldots D-1)$$



$$r \equiv \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = A|cos\sigma|$$

Una bacchetta rigida che ruota intorno al suo centro con estremità a v = c: $dl/dX_0 = r\ d\theta/Ad\tau = r/A = |cos\sigma|$.

Calcoliamo massa e momento angolare (seconda ora)

$$X_0 = A\tau \quad ; \quad X_1 = A\ cos\tau\ cos\sigma\ ,\ X_2 = A\ sin\tau\ cos\sigma$$

$$X_i \quad = \quad 0 \quad , \quad (i = 3, 4, \ldots D - 1)$$

$$p_i = \int_0^\pi d\sigma P_i(\sigma) = T \int_0^\pi d\sigma \dot{X}_i = 0$$

$$E = M = \int_0^\pi d\sigma P_0(\sigma) = T \int_0^\pi d\sigma \dot{X}_0 = \pi T A$$

$$\begin{aligned} J_{12} \quad &= \quad \int_0^\pi d\sigma (X_1 P_2 - X_2 P_1)(\sigma) \\ &= \quad TA^2 \int_0^\pi d\sigma (sin^2\tau cos^2\sigma + cos^2\tau cos^2\sigma) = \frac{\pi}{2} TA^2 \end{aligned}$$

dunque

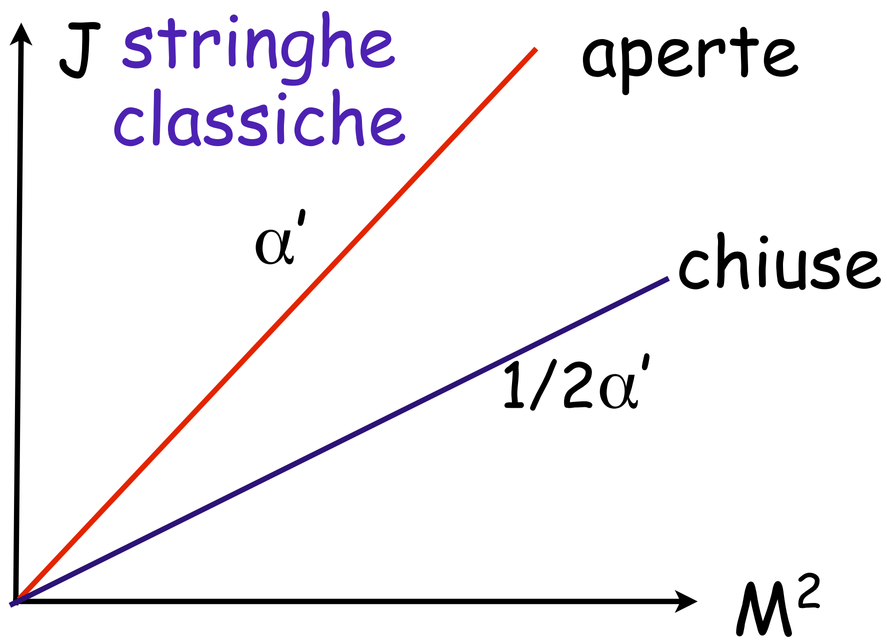
$$J = \frac{M^2}{2\pi T} = \alpha' M^2\ ,\ \alpha' \equiv \frac{1}{2\pi T}$$

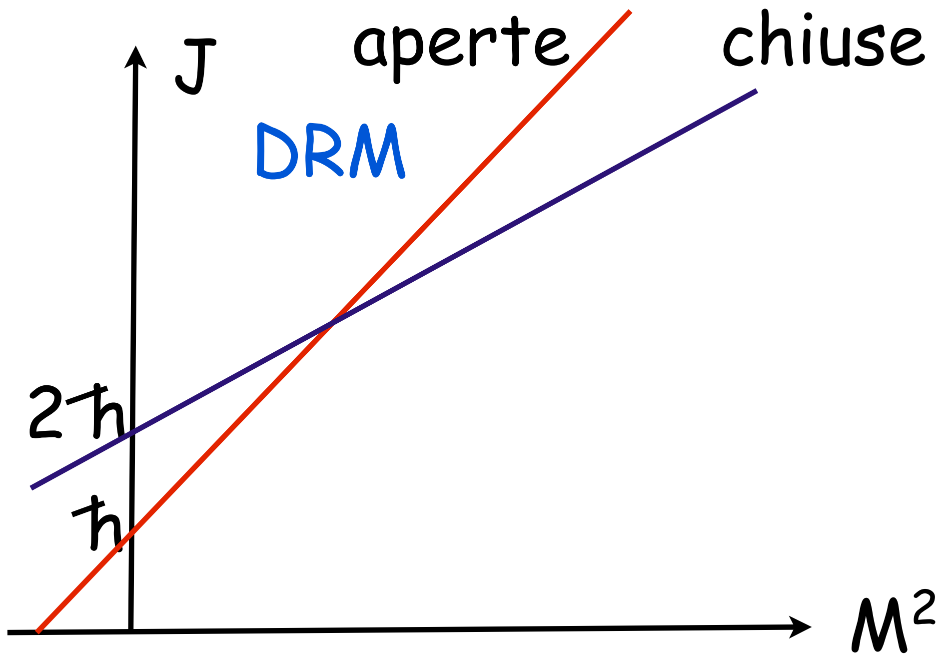
Troviamo $$J = \frac{M^2}{2\pi T} = \alpha' M^2 \ , \ \alpha' \equiv \frac{1}{2\pi T}$$

Questa soluzione massimizza J/M^2. La relazione è molto simile a quella delle traiettorie lineari di Regge che abbiamo discusso nel DRM.

Per stringhe chiuse: stessa relazione fra J e M^2 ma con T -> 2 T (α' -> 1/2 α'). A parità di lunghezza totale la bacchetta rigida chiusa ha la metà dell'estensione di quella aperta (dato che deve tornare su se stessa).

Però stringhe classiche e DRM differiscono sostanzialmente. Nella stringa classica, J e M^2 possono avere qualunque valore con $J < \alpha' M^2$ => non si può avere J senza M! Ma nel DRM c'erano (purtroppo?) tali stati:





- Questa discrepanza sparisce completamente una volta che passiamo dalla stringa classica a quella quantizzata.
- E' qui che punti material e stringhe differiscono ancor maggiormente.
- Punti materiali relativistici possono essere quantizzati in qualunque geometria spazio-temporale
- Questo non è vero per le stringhe!
- Perfino in uno spazio-tempo piatto la quantizzazione è problematica a meno che D non assuma un valore (detto critico)!
- La quantizzazione di una stringa è non banale e può essere portata avanti in vari modi.
- Ma il risultato finale è sempre lo stesso e conduce a un pieno accordo con il DRM!