

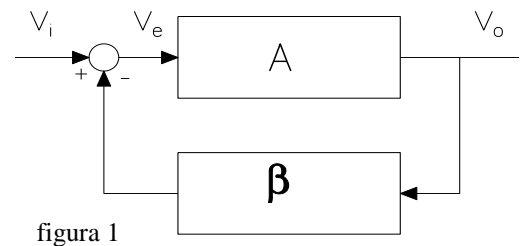
## PARTE VIII

### LA CONTROREAZIONE

#### 1. Introduzione alla controreazione

La controreazione trova frequente impiego nella realizzazione di circuiti elettronici, in particolare amplificatori, allo scopo di ottenere buone prestazioni, migliori che in assenza di reazione. Schemi a controreazione, inoltre, trovano largo impiego sia nella strumentazione fisica che nei sistemi di controllo, dove la controreazione ha un ruolo essenziale.

Sebbene il principio della **reazione negativa** (*negative feedback*) fosse in pratica noto già da tempo<sup>1,2</sup>, un esempio classico è il regolatore di Watt, la sua introduzione esplicita e la sua formalizzazione viene attribuita all'ingegnere americano Harold S. Black<sup>3</sup>, che negli anni '20 del secolo scorso lo utilizzò per risolvere i problemi di stabilità del guadagno e di distorsione negli amplificatori a tubi elettronici per telefonia a grandi distanze<sup>4</sup>.



Lo schema fondamentale della connessione a controreazione è illustrato nella figura. Qui il segnale  $V_e$  applicato all'amplificatore  $A$  non è il segnale d'ingresso  $V_i$ , ma la differenza fra questo e una frazione  $\beta$  del segnale d'uscita  $V_o$ . Questo schema gode di proprietà estremamente interessanti, che esamineremo nel seguito e che sono assai diverse da quelle delle sue parti costituenti: l'amplificatore  $A$ , che costituisce il *blocco diretto*, e il

<sup>1</sup> Secondo l'ingegnere americano Robert A. Pease, progettista di circuiti integrati e studioso della controreazione, le prime applicazioni del principio della reazione negativa sono antichissime. Egli cita a questo riguardo l'anello che viene posto al naso dei buoi da tiro. Tirando l'anello con una corda ed esercitando una forza anche assai debole, si riesce infatti a persuadere l'animale a muoversi trainando un carico pesante. Si tratta, evidentemente, di un "inseguitore" di posizione ( $\rightarrow$  pag.4) a reazione negativa.

<sup>2</sup> G.V. Pallottino *Il principio della controreazione* Didattica delle scienze, n. 234, pp.7-11, Nov, 2004; n.235, pp.11-16, Genn.2005, <http://www.roma1.infn.it/rog/pallottino/articoli%20divulgativi/Feedback.pdf>

<sup>3</sup> H.S. Black *Stabilized Feed-Back Amplifiers* Electrical Engineering, gennaio 1934, pp.114-120, ristampato in Proc. IEEE, vol.72, giugno 1984, pp.716-722; H.S. Black *Inventing the negative-feedback amplifier* IEEE Spectrum, vol.14, pp.54-60, dicembre 1977.

<sup>4</sup> L'attenuazione introdotta dalle linee di trasmissione nelle comunicazioni telefoniche a grandi distanze viene compensata disponendo amplificatori (detti ripetitori) a intervalli regolari lungo le linee. Il guadagno complessivo di questi amplificatori in cascata è soggetto a forti variazioni quando come elementi attivi si impiegano dei tubi elettronici. La corrente emessa dal catodo di un tubo elettronico, e quindi la transconduttanza, si riduce infatti gradualmente man mano che il catodo, al passare del tempo, si deteriora. Se il guadagno è eccessivo, si ha forte distorsione nonlineare; se è insufficiente, il segnale si trova immerso nel rumore.

circuito  $\beta$  (realizzato generalmente con elementi passivi), che costituisce il *blocco di reazione*. Anticipiamo subito che la proprietà fondamentale di questo schema consiste nella "**desensibilizzazione**" della relazione ingresso-uscita rispetto alle variazioni dei parametri del blocco diretto. Qualsiasi variazione dell'uscita, dovuta a una variazione del guadagno di A o ad altre cause, si traduce infatti in una corrispondente variazione del segnale  $V_e$ , che a sua volta tende a compensarla, producendo una variazione del segnale d'uscita di segno opposto.

Il segnale  $V_e(s)$  effettivamente applicato all'amplificatore, chiamato generalmente *segnale d'errore*<sup>5</sup>, è dato dall'espressione

$$(1) \quad V_e(s) = V_i(s) - \beta(s)V_o(s)$$

dove  $\beta(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento del blocco di reazione; il segnale  $V_o$  all'uscita dell'amplificatore, che ha funzione di trasferimento  $A(s)$ , è

$$(2) \quad V_o(s) = A(s)V_e(s)$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ricava la seguente espressione per la funzione di trasferimento complessiva ingresso-uscita in presenza di reazione, chiamata *funzione di trasferimento a ciclo chiuso* o ad anello chiuso (*closed loop transfer function*):

$$(3) \quad A_F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta(s)}$$

Tale espressione mostra che quando  $|1+A(s)\beta(s)| > 1$ , e allora si ha reazione negativa, il guadagno a ciclo chiuso è minore di quello del blocco diretto. Questo è il prezzo dei vantaggi che offre la controreazione; ma ciò in pratica non costituisce un problema dato che si può facilmente ottenere il valore desiderato del guadagno introducendo altri stadi di amplificazione (con costi oggi modestissimi).

Facciamo un semplice esempio, assumendo A e  $\beta$  costanti e reali:  $A = 1000$ ,  $\beta = 0,099$ . Si ha dunque  $A\beta = 99$  e  $A_F = 1000/(1 + 99) = 10$ . Se il segnale d'ingresso è  $V_i = 10$  mV, quello d'uscita sarà  $V_o = 100$  mV, quello d'errore  $V_e = V_i - \beta V_o = 10$  mV -  $0,099 \times 100$  mV = 0,1 mV. Si noti che il segnale d'errore, cioè quello effettivamente applicato all'ingresso dell'amplificatore, è  $1 + A\beta$  volte più piccolo di quello d'ingresso.

In un sistema reazionato ha un ruolo essenziale la funzione  $-A(s)\beta(s)$ , chiamata *funzione di trasferimento a ciclo aperto* o ad anello aperto (*open loop transfer function*), che rappresenta

---

<sup>5</sup> Si chiama così perché proporzionale allo scarto fra l'uscita effettiva e quella desiderata.

appunto la trasmissione del segnale attraverso tutto il ciclo di reazione quando s'immagina di interromperlo in un punto qualsiasi:

$$(4) \quad L(s) = -A(s) \beta(s)$$

dove il segno negativo rappresenta l'operazione di differenza espressa dalla (1). La funzione al denominatore della (3) prende il nome di *fattore di reazione* (o anche di "differenza di ritorno") e ha grande importanza dato che, come vedremo, essa esprime in termini quantitativi l'entità della reazione

$$(5) \quad D(s) = 1 + A(s)\beta(s)$$

Esaminando la (3) si osserva che quando è verificata la condizione

$$(6) \quad |D(s)| = |1 + A(s)\beta(s)| \gg 1$$

cioè il modulo del fattore di reazione è molto maggiore dell'unità, allora la funzione  $A_F(s)$  viene a dipendere esclusivamente da quella del blocco di reazione

$$(7) \quad A_F(s) \approx 1/\beta(s)$$

(e in tal caso l'ampiezza del segnale d'errore diventa trascurabile rispetto a quella del segnale d'ingresso). Per questo la condizione (6) viene detta di **desensibilizzazione totale**, nel senso che, quando essa è verificata, la funzione a ciclo chiuso  $A_F(s)$  viene ad essere pratica mente indipendente dalla funzione  $A(s)$  del blocco diretto<sup>6</sup>. Un'estesa classe di circuiti, in particolare la maggior parte di quelli impieganti amplificatori operazionali, sfrutta proprio questa condizione per realizzare funzioni di varia natura (amplificazione, integrazione nel tempo, filtraggio, ecc.) con grandissima accuratezza, dipendente quasi esclusivamente dalla precisione degli elementi passivi che costituiscono il blocco di reazione.

Quanto espresso dalla (7), naturalmente, riguarda anche la dipendenza dalla frequenza e la risposta temporale, che vengono mutate profondamente rispetto a quelle del circuito non reazionato.

Nel caso particolare, realizzato spesso in pratica, in cui il blocco di reazione sia costituito esclusivamente da elementi resistivi e quindi  $\beta(s)$  sia costante, la funzione a ciclo chiuso viene ad essere a sua volta indipendente da  $s$ , per tutti i valori di questa variabile per cui è verificata la (6).

---

<sup>6</sup> Si noti però che nella condizione (6) interviene la variabile  $s$ . Pertanto, dato che a frequenze sufficientemente alte il guadagno di qualsiasi amplificatore tende inevitabilmente a ridursi, la relazione (6) può essere verificata soltanto in un intervallo di frequenze limitato superiormente (e anche inferiormente, in presenza di tagli a bassa frequenza).

Da ciò deriva in genere un allargamento della banda passante e una corrispondente riduzione dei tempi caratteristici della risposta temporale. Ma questo sarà precisato meglio nel seguito.

Un caso limite assai interessante in pratica è quello della *controreazione unitaria*, che si ha quando  $\beta = 1$ . In tal caso il segnale d'uscita tende a una replica fedele di quello d'ingresso, cioè "lo insegue". Di qui la denominazione di "inseguitore" (*follower*) per i circuiti dove questo si verifica (*voltage follower, emitter follower, source follower*). Il segnale d'errore, in questi circuiti, viene ad assumere pienamente il significato di scarto fra il segnale effettivamente presente in uscita e quello ideale (qui costituito dal segnale d'ingresso).

In generale in un circuito reazionato si ha **reazione negativa** quando

$$(8) \quad |D(s)| = |1 + A(s)\beta(s)| > 1$$

mentre si ha invece **reazione positiva** quando

$$(9) \quad |D(s)| = |1 + A(s)\beta(s)| < 1$$

cioè quando il segnale di reazione  $-\beta V_o$  si trova in fase, anzichè in opposizione di fase, rispetto a quello d'ingresso.

Nel primo caso l'amplificazione a ciclo chiuso è minore in modulo di quella del blocco diretto, nel secondo l'amplificazione è maggiore (dato che in concreto il segnale di reazione si somma, anzichè sottrarsi, a quello d'ingresso). Nel caso della reazione negativa, inoltre, la funzione di trasferimento a ciclo chiuso è soggetta agli effetti di desensibilizzazione rispetto ai parametri del blocco diretto e di minore dipendenza della funzione  $A_F(s)$  dalla variabile  $s$  rispetto alla funzione  $A(s)$ . Nel caso della reazione positiva si hanno invece effetti opposti, generalmente indesiderati. Il caso limite della reazione positiva si verifica quando  $|D(s)|$  tende a zero. In tal caso si ha instabilità e il circuito diventa sede di oscillazioni indesiderate che ne stravolgono il funzionamento. Cioè si ha un oscillatore ( $\rightarrow$  pag. 35).

Qui è importante osservare che può darsi, e in effetti accade spesso, che in certe regioni di frequenza si abbia reazione negativa mentre in altre si abbia invece reazione positiva. Questo può succedere quando la funzione di trasferimento a ciclo aperto ha due o più poli (due o più zeri a bassa frequenza, tipicamente all'origine), in modo che alle alte frequenze (alle basse frequenze) si abbia una rotazione di fase complessiva equivalente ad una inversione di segno, e soprattutto quando essa contiene degli elementi di ritardo puro ( $e^{-sT}$ ), che introducono sfasamento continuamente crescente con la frequenza.

Torniamo ora ad esaminare lo schema di figura 1 per trarne alcune osservazioni. La prima riguarda il segno della reazione, che in questa rappresentazione è stato esplicitato come negativo<sup>7</sup> per la presenza di un circuito sottrattore, che esegue l'operazione espressa dalla (1). Ciò significa, perchè si abbia reazione negativa, assumere che nella regione delle frequenze di interesse l'effetto complessivo del blocco diretto e di quello di reazione non dia luogo a inversione di segno e quindi, in pratica, che il numero di stadi di amplificazione che introducono inversione di segno sia pari (ma sia dispari qualora il segnale di reazione venga sommato, e non sottratto, a quello d'ingresso).

Un'altra osservazione riguarda le ipotesi che sono alla base dello schema di figura 1 e che solo di rado sono esattamente verificate in pratica, dato che stiamo rappresentando dei circuiti elettrici usando uno schema a blocchi ( $\rightarrow$  pag. 40, parte I). Oltre a supporre che le impedenze d'ingresso dei due blocchi siano molto maggiori di quelle d'uscita dei circuiti che li alimentano e che le loro impedenze d'uscita siano molto minori di quelle d'ingresso dei circuiti che ne costituiscono il carico, si deve ammettere che in ciascun blocco la trasmissione del segnale avvenga solamente dall'ingresso verso l'uscita, cioè che essi siano *unilaterali*. Quest'ultima ipotesi è ben verificata, di solito, per quanto riguarda il blocco diretto, ma non per il blocco di reazione, che normalmente è realizzato con elementi passivi (come resistori e condensatori) e dunque non è unilaterale.

Un'ultima osservazione riguarda l'individuazione del blocco diretto e di quello di reazione quando si esamina lo schema elettrico di un circuito reazionato. Questa individuazione può risultare infatti tutt'altro che immediata e, a volte, anche poco significativa. In questi casi l'analisi del circuito, per determinarne la funzione di trasferimento ingresso-uscita a ciclo chiuso, andrà condotta con i metodi circuitali usuali (nodi o maglie). Solo successivamente si cercherà di individuare separatamente il blocco diretto e quello di reazione, riconducendo la funzione così ottenuta alla forma espressa dalla (3), per determinare poi la funzione di trasferimento a ciclo aperto e il fattore di reazione. Ma anche questo procedimento potrà, a volte, ridursi a un esercizio formale. Può darsi, infatti, che per un medesimo circuito si possano trovare più rappresentazioni alternative, cioè mediante blocchi (diretto e di reazione) differenti. Può anche darsi, inoltre, che un medesimo parametro intervenga nelle espressioni di entrambe le funzioni  $A(s)$  e  $\beta(s)$  e quindi la schematizzazione così ottenuta non sia esattamente riconducibile al modello di fig.1.

---

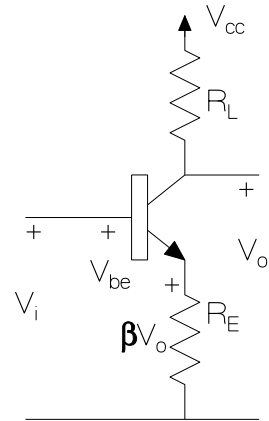
<sup>7</sup> Si sarebbe potuto, come in altre trattazioni, considerare in ingresso un circuito sommatore anzichè sottrattore (assumendo allora implicitamente che, per avere reazione negativa, nella regione delle frequenze di interesse il blocco diretto e quello di reazione diano luogo complessivamente a inversione di segno). In questo caso si scriverebbe  $A_F = A/(1 - A\beta)$ , con  $L = A\beta$  e  $D = 1 - A\beta$ .

### Esempio. Amplificatore a emettitore comune con resistore in serie all'emettitore.

L'espressione del guadagno di questo circuito è:  $-h_{fe}R_L/(h_{ie} + h_{fe}R_E)$ , avendo trascurato i parametri  $h_r$  e  $h_o$  del circuito equivalente del transistor e assunto  $h_{fe} \gg 1$ . Questa espressione, dividendo numeratore e denominatore per  $h_{ie}$ , può essere posta in una forma corrispondente alla (3). Si individua allora  $-h_{fe}R_L/h_{ie}$  come guadagno (A) del blocco diretto e  $-R_E/R_L$  come guadagno ( $\beta$ ) del blocco di reazione. Il fattore di reazione del circuito è dunque  $1 + h_{fe}R_E/h_{ie}$ .

Allo stesso risultato si può giungere anche attraverso l'esame dello schema del circuito, individuando il segnale di reazione  $\beta V_o$  nella tensione d'emettitore, che si sottrae a quella d'ingresso per determinare il segnale d'errore ( $V_{be} = V_i - \beta V_o$ ) effettivamente applicato al blocco diretto. Assumendo la corrente d'emettitore uguale a quella di collettore ( $h_{fe} \gg 1$ ), si ricava  $\beta = -R_E/R_L$ . Il blocco diretto, costituito dal transistor non reazionato, ha poi evidentemente guadagno  $-h_{fe}R_L/h_{ie}$ .

Qui l'interpretazione del circuito in termini dello schema di figura 1 è immediata, ma dà luogo a un problema: il parametro  $R_L$  figura nelle espressioni di entrambi i blocchi, che non sono dunque indipendenti fra loro.



Il fatto è che la controreazione non è una proprietà fisica intrinseca di una rete<sup>8</sup>, ma piuttosto un metodo di analisi che ne evidenzia determinate proprietà. Costituendo un punto di vista estremamente fecondo nella maggior parte dei casi, ma altre volte assai poco o per nulla significativo. Per esempio, anche un partitore resistivo può essere ricondotto allo schema di figura 1. Lasciamo al lettore questo esercizio e, soprattutto, la valutazione dell'opportunità di adottare questo approccio in casi di tal genere.

Notiamo infine che il punto di vista della reazione, che si rivela di grande utilità quando è usato con fini intenzionali nel progetto di circuiti, strumenti e sistemi di controllo, può anche costituire un prezioso "schema interpretativo"<sup>1</sup> nello studio di sistemi della natura più varia, naturali come artificiali.

A modelli a controreazione, infatti, si può infatti assai utilmente ricondurre il comportamento di molti sistemi fisici, biologici, sociali. In particolare, si possono interpretare come basati sulla reazione i meccanismi di funzionamento di vari fenomeni e dispositivi fisici. Fra gli esempi, la relazione fra guadagno in corrente a emettitore comune e a base comune per un transistor bipolare, l'interpretazione della legge di Moore in termini di reazione positiva, come pure la problematica dell'aumento del contenuto di CO<sub>2</sub> nell'atmosfera e quella delle variazioni climatiche.

<sup>8</sup> B. Pellegrini *Improved Feedback Theory*, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 56, n. 9, pp.1949-1959, sett. 2009

## GLI EFFETTI DELLA CONTROREAZIONE

Esaminiamo ora i principali effetti della reazione negativa. Ci occupiamo in particolare degli effetti di desensibilizzazione e di linearizzazione del blocco diretto, degli effetti sull'azione dei disturbi, e delle modifiche che subisce la risposta dinamica, lasciando invece al seguito l'esame delle modifiche che subiscono le impedenze d'ingresso e d'uscita di un circuito reazionato.

Tutti questi effetti, come si è già detto, hanno un'origine comune nell'azione di compensazione automatica che ha luogo nei sistemi a reazione negativa: qualsiasi variazione della grandezza d'uscita, comunque provocata, si traduce in una corrispondente variazione del segnale d'errore e dunque in una azione correttiva di segno opposto. Questa azione è tanto più efficace quanto maggiore è il modulo del fattore di reazione, fino al caso limite espresso dalla (6) (desensibilizzazione totale) quando la relazione fra ingresso e uscita può essere posta idealmente nella forma:

$$(10) \quad V_o(s) = V_i(s)/\beta(s)$$

### 2. La desensibilizzazione

Per *desensibilizzazione* si intende la riduzione della dipendenza della funzione di trasferimento a ciclo chiuso dai parametri del blocco diretto (guadagno, costanti di tempo, ecc.) rispetto a quella della funzione di trasferimento in assenza di reazione. La dipendenza di una funzione di trasferimento  $H$  da un generico parametro  $k$  che interviene nell'espressione della funzione è espressa in generale dalla cosiddetta *sensibilità*  $S_k^H$ , definita come rapporto fra la variazione relativa della funzione e la variazione relativa del parametro che la provoca:

$$(11) \quad S_k^H = \left| \frac{\Delta H/H}{\Delta k/k} \right|$$

Quando  $\Delta k/k \ll 1$  si utilizza la corrispondente definizione differenziale

$$(12) \quad s_k^H = \left| \frac{dH/H}{dk/k} \right|$$

Un valore di sensibilità molto minore (maggiore) dell'unità indica che la funzione  $H$  è praticamente insensibile (fortemente sensibile) alle variazioni del parametro; si ha poi sensibilità unitaria se la funzione è direttamente o inversamente proporzionale al parametro in esame.

Consideriamo ora le variazioni della funzione di trasferimento  $A_F$  di un sistema reazionato dovute a un parametro  $k$  che interviene nell'espressione della funzione di trasferimento del blocco diretto  $A$ . In questo caso si trova che la sensibilità della funzione ingresso-uscita rispetto a tale parametro è data dall'espressione

$$(13) \quad s_k^{A_F} = \frac{s_k^A}{D}$$

dove  $s_k^A$  rappresenta la sensibilità rispetto a  $k$  della funzione  $A$ . La sensibilità viene dunque ridotta all'aumentare del fattore di reazione (e ciò non si verifica per la sensibilità rispetto ai parametri del blocco di reazione); mentre nel caso della reazione positiva si ha esaltazione, anziché riduzione, della sensibilità.

L'aspetto più importante riguarda le variazioni del guadagno del blocco diretto dovute, per esempio a effetti di temperatura oppure all'invecchiamento o alla sostituzione di componenti, che possono essere rese trascurabili ai fini pratici scegliendo un valore opportuno del fattore di reazione. Se il guadagno  $A$  è soggetto a una variazione  $\Delta A$ , il guadagno a ciclo chiuso è soggetto a sua volta alla corrispondente variazione

$$\Delta A_F = \frac{A + \Delta A}{1 + (A + \Delta A)\beta} - \frac{A}{1 + A\beta} = \frac{\Delta A}{(1 + (A + \Delta A)\beta)(1 + A\beta)}$$

Dividendo per  $A_F$  si ha

$$(14) \quad \frac{\Delta A_F}{A_F} = \frac{\Delta A}{A} \frac{1}{1 + (A + \Delta A)\beta}$$

da cui si ottiene l'espressione desiderata della sensibilità

$$(15) \quad s_A^{A_F} = \frac{1}{1 + (A + \Delta A)\beta}$$

che per  $\Delta A \ll A$  si riduce alla (13), essendo evidentemente  $s_A^A = 1$ . Per esempio, se si vuole ottenere un guadagno preciso all'1% usando un amplificatore che è soggetto a variazioni di guadagno del 10%, si conclude, in base alla (13), che occorre controezionarlo in modo da avere  $|D| > 10$  nella regione delle frequenze di interesse.

In pratica, quando le variazioni dei parametri sono rilevanti non conviene usare le espressioni differenziali della sensibilità, ma quelle in termini di differenze finite. Come illustra l'Esempio seguente.



### Esempio. Le variazioni del guadagno di un amplificatore a emettitore comune

Consideriamo il circuito esaminato nell'Esempio a pag. 4, assumendo i seguenti valori dei parametri:  $h_{ie} = 2,5$  k $\Omega$ ,  $h_{fe} = 100$ ,  $R_L = 2,5$  k $\Omega$ ,  $R_E = 475$   $\Omega$ . Usando le formule ricavate nell'esempio si ha:  $A = -h_{fe}R_L/h_{ie} = -100*2500/2500 = -100$ ,  $\beta = -R_E/R_L = -475/2500 = -0,19$ . Pertanto il fattore di reazione è  $D = 1 + A\beta = 1 + 19 = 20$  e il guadagno a ciclo chiuso è  $A_F = -100/20 = -5$ . Se il guadagno del transistor si raddoppia, si ha:  $\Delta A = -100$ ,  $\Delta A/A = 1$  e  $1+(A+\Delta A)\beta = 39$ . Usando la (14) si ha pertanto  $\Delta A_F/A_F = 1/39 \approx 2,6\%$ . Se il guadagno del transistor si dimezza, si ha:  $\Delta A = 50$ ,  $\Delta A/A = -0,5$  e  $1+(A+\Delta A)\beta = 10,5$ . Usando la (14) si ha in tal caso  $\Delta A_F/A_F = -0,5/10,5 \approx -4,8\%$ . Utilizzando la definizione differenziale (13) si avrebbe invece, nei due casi, ...

Il caso limite è evidentemente quello, già considerato, della desensibilizzazione totale quando, grazie a un valore molto alto del fattore di reazione, e allora è verificata la condizione (6), la sensibilità della funzione di trasferimento a ciclo chiuso rispetto ai parametri del blocco diretto diventa trascurabile.

### 3. La linearizzazione

In tutta la discussione condotta sinora abbiamo sempre assunto implicitamente la linearità dei circuiti. Questa ipotesi è generalmente corretta per quanto riguarda il blocco di reazione, ma non per il blocco diretto, che comprende gli elementi attivi necessari per amplificare i segnali. Gli effetti della nonlinearità, d'altra parte, dipendono sempre dal livello dei segnali: generalmente, quanto maggiore è la loro ampiezza tanto più ci si allontana dalla condizione di funzionamento per piccoli segnali. E questo si verifica soprattutto nello stadio d'uscita degli amplificatori, dove spesso si osserva distorsione.

La controreazione, come vedremo subito, permette di linearizzare efficacemente la risposta del blocco diretto e, conseguentemente, di ridurre la distorsione. Per trattare il problema in modo semplice assumiamo in quanto segue che i circuiti del blocco diretto e di quello di reazione siano statici: il guadagno del blocco di reazione è allora una costante  $\beta$ , mentre rappresentiamo la caratteristica nonlineare dell'amplificatore che costituisce il blocco diretto con l'espressione

$$(15) \quad v_o = f(v)$$

assumendo la funzione  $f(v)$  monotona crescente e derivabile nell'intervallo di valori di  $v$  che corrispondono alla gamma dinamica dell'uscita. In ciascun punto della caratteristica la variazione dell'uscita è dunque  $dv_o = (df/dv)dv$ , dove la nonlinearità si manifesta nel fatto che il "guadagno differenziale"  $df/dv$  non è costante nell'intervallo considerato.

In presenza di reazione, l'ingresso  $v$  dell'amplificatore è costituito dal segnale d'errore e si ha dunque  $v = v_e = v_i - \beta v_o$ . In questo caso la variazione dell'uscita è

$$(16) \quad dv_o = \frac{df}{dv} (dv_i - \beta dv_o)$$

da cui si ottiene l'importante risultato

$$(17) \quad \frac{dv_o}{dv_i} = \frac{df/dv}{1 + \beta df/dv}$$

Si conclude che in presenza di reazione negativa le variazioni del guadagno differenziale nell'intervallo considerato vengono ridotte; più precisamente, il guadagno differenziale viene attenuato maggiormente laddove è più elevato, in minor misura dove è più basso. E questo si traduce appunto in una linearizzazione della caratteristica. Nel caso limite di guadagno d'anello differenziale molto grande rispetto all'unità, corrispondente alla condizione di desensibilizzazione totale, la caratteristica del blocco diretto viene linearizzata totalmente essendo  $dv_o/dv_i = 1/\beta$  su tutto l'intervallo. Sempre dalla (17) si ricava poi che in presenza di reazione positiva, invece, la nonlinearità della caratteristica viene esaltata.

Qui notiamo che non è generalmente possibile ricavare analiticamente la funzione linearizzata in presenza di reazione  $v_o = f_F(v_i)$  dalla conoscenza della funzione  $v_o = f(v)$ . Si può invece ottenerla numericamente, cioè risolvendo l'equazione nonlineare  $v_o = f(v_i - \beta v_o)$  in modo numerico, direttamente oppure usando il metodo implicito illustrato in quanto segue.

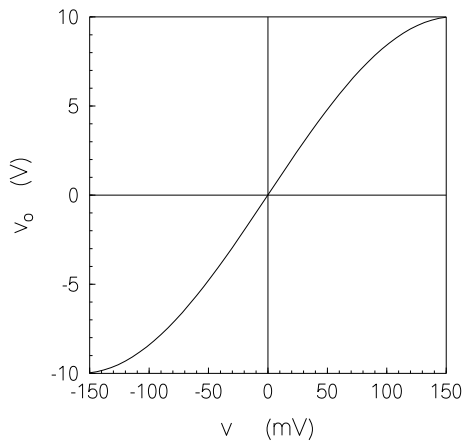
Per illustrare quanto detto consideriamo l'amplificatore con la caratteristica nonlineare mostrata nella parte a) della figura a pagina seguente, espressa dalla relazione

$$(18) \quad v_o = 10 \sin(10 v) \quad -\pi/20 < v < \pi/20$$

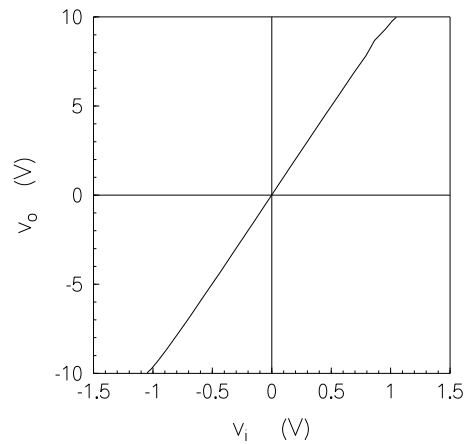
e rappresentata nelle prime due righe della tabella 1 (dove si riportano soltanto i valori positivi di  $v$  dato che la caratteristica è simmetrica rispetto all'origine). Il guadagno differenziale nell'origine evidentemente è  $(df/dv)_o=100$ .

Tabella 1 Caratteristica nonlineare  $v_o=f(v)$  di un amplificatore (righe 1 e 2) e caratteristica linearizzata  $v_o = f(v_i)$  (righe 2 e 3), ottenuta contoreazionando con  $\beta = 0,09$ .

$v_o$ (volt)	0	1,494	2,955	4,35	5,646	6,816	7,833	8,674	9,320	9,757	9,975
$v$ (volt)	0	0,015	0,03	0,045	0,06	0,075	0,09	0,105	0,12	0,135	0,15
$v_i$ (volt)	0	0,149	0,296	0,436	0,568	0,688	0,795	0,886	0,959	1,013	1,048



a)



b)

Ora linearizziamo l'amplificatore, reazionandolo con  $\beta = 0,09$ . Il guadagno differenziale nell'origine, usando la (17), è  $(df/dv_i)_0 = 10$ . Dato che il segnale applicato all'amplificatore è  $v = v_e = v_i - \beta v_o$ , possiamo calcolare il valore della tensione d'ingresso  $v_i$  corrispondente a ciascun valore dell'uscita. Dato  $v_o$ , si ha infatti  $v_i = v + \beta v_o$ . I risultati del calcolo sono riportati nell'ultima riga della tabella e rappresentati nella parte b) della figura. Il confronto fra le due curve mostra chiaramente l'effetto di linearizzazione della controreazione; si noti però l'effetto della reazione sulla saturazione, che da graduale diventa netta.

Per compensare la riduzione del guadagno dovuta alla reazione negativa occorre evidentemente introdurre nel blocco diretto ulteriori stadi di amplificazione. Questi non dovranno introdurre distorsione a loro volta, ma tale requisito è facile da soddisfare dato che devono trattare segnali di minore ampiezza. L'efficacia della reazione negativa per ridurre la distorsione è ben dimostrata in un vasto campo di applicazioni, fra cui gli amplificatori usati per la riproduzione dei suoni dove si richiede bassa distorsione a elevati livelli di potenza.

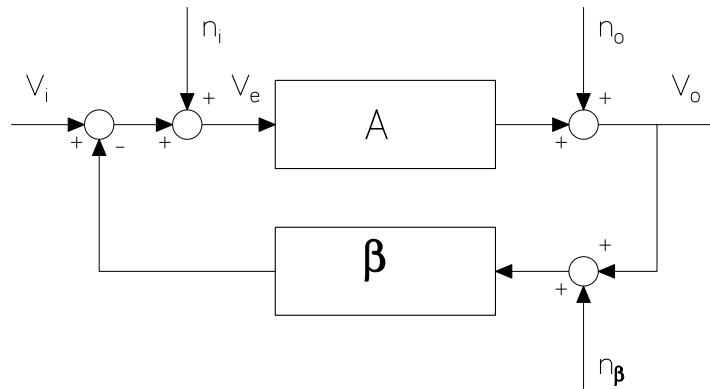
Ci si può chiedere come sia possibile che un amplificatore con caratteristica nonlineare, nella connessione a controreazione, produca un segnale d'uscita che invece è in relazione approssimativamente lineare rispetto a quello d'ingresso. La spiegazione, al di là della trattazione formale, si trova nel meccanismo della controreazione. Quando il fattore di reazione è molto elevato, se l'amplificatore è lineare, il segnale d'errore è corrispondentemente piccolo, e nel caso statico è una copia fedele dell'ingresso. Se l'amplificatore è nonlineare, il segnale d'errore, provenendo dal confronto fra l'ingresso e la frazione  $\beta$  dell'uscita, è costituito quasi esclusivamente dalla distorsione presente in uscita, con la conseguenza che il legame fra ingresso e segnale d'errore tende alla relazione nonlineare inversa di quella dell'amplificatore. La conclusione è che in un amplificatore nonlineare non reazionato l'uscita è distorta rispetto all'ingresso, mentre in uno linearizzato dalla controreazione l'uscita è approssimativamente lineare rispetto all'ingresso, mentre invece è fortemente distorto il segnale d'errore.

**Esercizio 1.** Tracciare il grafico della relazione nonlineare  $v_e = g(v_i)$ , fra il segnale d'ingresso e il segnale d'errore, utilizzando i dati della tabella 1. Verificare che la caratteristica così ottenuta corrisponde approssimativamente alla funzione inversa di quella espressa dalla (18).

**Esercizio 2.** Simulare su calcolatore l'amplificatore con caratteristica nonlineare espressa dalla (18), controeazionato con  $\beta=0,09$ , applicando in ingresso una sinusoide tale che l'uscita abbia 9 volt di ampiezza (valore di picco). Tracciare i grafici dei segnali: d'ingresso, d'errore e d'uscita.

#### 4. L'effetto sui disturbi

Esaminiamo ora l'effetto della controeazione sui disturbi, cioè sui segnali indesiderati (rumore, distorsione, residuo di alternata dell'alimentazione, effetti di campi elettromagnetici esterni, ecc.) che si sommano al segnale utile nelle varie parti del circuito. Facciamo riferimento allo schema in figura, supponendo per semplicità che i due blocchi siano caratterizzati dalle costanti reali  $A$  e  $\beta$ .



Qui  $n_i$  rappresenta il rumore prodotto nei circuiti d'ingresso del blocco diretto (ed eventualmente anche il rumore associato al segnale d'ingresso  $v_i$ );  $n_o$  rappresenta i disturbi agenti all'uscita del blocco diretto (in particolare, gli effetti di distorsione dovuti all'eventuale nonlinearietà che qui si manifesta);  $n_\beta$  rappresenta infine i disturbi agenti sul blocco di reazione (incluso il rumore ivi generato).

Il segnale d'errore è dato dall'espressione

$$(19) \quad v_e = v_i + n_i - \beta(v_o + n_\beta)$$

da cui, utilizzando la (2), si ricava la seguente espressione dell'uscita

$$(20) \quad v_o = (v_i + n_i) \frac{A}{1 + A\beta} + n_o \frac{1}{1 + A\beta} - n_\beta \frac{A\beta}{1 + A\beta}$$

dove il segno negativo dell'ultimo termine significa semplicemente che il contributo di  $n_\beta$  all'uscita ha segno opposto a quello di  $n_\beta$  stesso. Esaminando la (20) si osserva immediatamente che il

disturbo  $n_i$  subisce le stesse vicende del segnale  $v_i$ , da cui si presenta come indistinguibile, e dunque la controreazione non ha effetto su esso<sup>9</sup>.

La (20) indica poi che il contributo del disturbo  $n_o$  agente in uscita viene ridotto dalla controreazione, tanto più quanto è maggiore il fattore di reazione. Questo risultato è dunque in accordo con quanto si era trovato prima esaminando l'effetto della controreazione sulla linearizzazione del blocco diretto. D'altra parte per ridurre il contributo di questo disturbo rispetto a quello del segnale è necessario aumentare il guadagno  $A$  del blocco diretto.

La reazione negativa, infine, è del tutto inefficace nei confronti del disturbo  $n_\beta$ , la cui azione consiste infatti nell'alterare l'informazione che viene riportata in ingresso, inceppando così il meccanismo della controreazione, con effetto particolarmente insidioso nei sistemi di controllo. Negli amplificatori ad alto guadagno fortemente controreazionati può risultare rilevante il contributo del rumore degli elementi che costituiscono la rete di reazione.

## 5. Gli effetti sulla risposta dinamica

L'applicazione della reazione negativa a un circuito ne modifica profondamente la risposta dinamica, come indica la (3) che qui riportiamo per comodità

$$(3) \quad A_F(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)\beta(s)}$$

alterando in particolare la posizione dei poli e degli zeri. Questi, all'aumentare del guadagno d'anello, si spostano nel piano  $s$  dalla loro posizione iniziale (poli e zeri della funzione  $A(s)$ ) fino a tendere asintoticamente, nella condizione di desensibilizzazione totale, alla posizione dei poli e degli zeri della funzione  $1/\beta(s)$ . Sebbene questo si traduca generalmente in un allargamento della banda passante e in una corrispondente riduzione dei tempi caratteristici, vi è la possibilità che i poli vengano ad avvicinarsi all'asse immaginario, e allora la risposta temporale avrà carattere oscillatorio poco smorzato, o addirittura lo attraversino, assumendo così parte reale positiva e dando luogo all'instabilità del circuito.

Il caso più semplice è quello in cui il blocco diretto è un sistema del primo ordine e il blocco di reazione un sistema statico, e quindi la funzione a ciclo aperto ha un solo polo:

---

<sup>9</sup> Il contributo di  $n_i$  all'uscita (misurato in termini di valore efficace totale) può essere ridotto, rispetto a quello del segnale, soltanto se il suo spettro è diverso da quello del segnale. Per esempio, se il rumore ha spettro costante mentre lo spettro del segnale è confinato in un determinato intervallo di frequenze, converrà che la risposta a ciclo chiuso abbia caratteristiche filtranti atte a trasmettere soltanto le frequenze del segnale.

$$(21) \quad A(s) = \frac{A_0}{1 + s\tau}$$

Sostituendo la (21) nella (3) si ottiene

$$(22) \quad A_F(s) = \frac{A_{F0}}{1 + s\tau_F}$$

dove

$$(23) \quad A_{F0} = \frac{A_0}{1 + A_0\beta} \quad ; \quad \tau_F = \frac{\tau}{1 + A_0\beta}$$

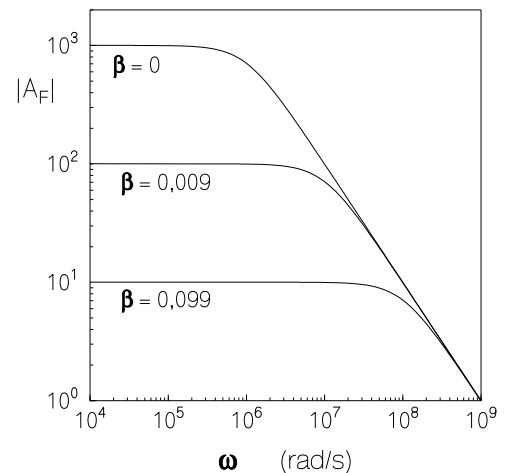
Sia la costante di tempo (e quindi anche tutti i tempi caratteristici della risposta temporale) che il guadagno del circuito reazionato vengono dunque ridotti nella stessa misura, secondo il fattore di reazione calcolato in continua, mentre la banda passante viene allargata corrispondentemente. Questa, che in assenza di reazione vale  $B = 1/2\pi\tau$ , assume ora infatti il valore

$$(24) \quad B_F = 1/2 \pi\tau_F$$

Dai risultati precedenti si conclude poi che il prodotto banda-guadagno resta costante.

$$(25) \quad A_0B = A_{F0}B_F$$

Questo è mostrato nella figura, dove si nota anche che il modulo della funzione di trasferimento reazionata  $A_F$  non eccede mai quello della funzione non reazionata  $A$  (rappresentato dalla curva indicata con  $\beta = 0$ ).



Il risultato espresso dalla (25) vale anche quando la reazione è positiva (cioè quando  $A_0\beta < 0$ ) e allora il guadagno aumenta e la banda passante si restringe. Tutto ciò, peraltro, soltanto nel caso che stiamo qui considerando: polo reale singolo.

La banda si allarga anche quando il blocco diretto presenta un taglio a bassa frequenza, con funzione di trasferimento

$$(26) \quad A(s) = A_0 \frac{s\tau}{(1 + s\tau)}$$

dove ora  $A_0$  rappresenta il guadagno alle frequenze molto maggiori di quella di taglio, sempre nell'ipotesi di  $\beta$  reale. E in questo caso la banda si allarga verso le basse frequenze.

Sostituendo la (26) nella (3) si trova infatti che la costante di tempo viene aumentata

$$(27) \quad \tau_F = \tau (1 + A_0\beta)$$

mentre il guadagno viene ridotto della stessa misura, come espresso dalla prima delle (23).

Un caso di notevole interesse pratico è quello in cui l'amplificatore presenta un taglio sia a bassa che ad alta frequenza, con funzione di trasferimento

$$(28) \quad A(s) = A_0 \frac{s\tau_1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

In questo caso, in presenza di reazione negativa<sup>10</sup>, la costante di tempo  $\tau_1$ , che determina la frequenza di taglio inferiore, aumenta come stabilito dalla (27), mentre la costante di tempo  $\tau_2$ , che determina la frequenza di taglio superiore, diminuisce come espresso dalla seconda delle (23). La banda passante viene dunque allargata sia alle alte che alle basse frequenze. Sostituendo la (28) nella (3), e assumendo al solito  $\beta$  reale, si potrà verificare quanto appena detto, ma si osserverà anche che i risultati espressi dalla seconda delle (23) e dalla (27) ora sono validi solo approssimativamente, con approssimazione tanto migliore quanto maggiore è il rapporto  $\tau_1/\tau_2$  fra le due costanti di tempo.

Tutte le volte, infatti, che la funzione di trasferimento del blocco diretto presenta due o più poli i risultati trovati nel caso di un solo polo risultano validi solo approssimativamente oppure vengono a cadere del tutto. In particolare, può accadere che il modulo della funzione di trasferimento reazionata ecceda quello della funzione non reazionata (effetto di reazione positiva).

Esaminiamo, in particolare, il caso in cui la funzione di trasferimento del blocco diretto presenta due poli reali, l'uno a  $-1/\tau$  e l'altro a  $-k/\tau$

$$(29) \quad A(s) = \frac{A_0}{(1 + s\tau)(1 + s\tau/k)}$$

Sostituendo nella (3), e assumendo ancora  $\beta$  reale, si ha

$$(30) \quad A_F(s) = \frac{A_{F0}}{1 + s\tau(1 + 1/k)/D_0 + s^2\tau^2/kD_0}$$

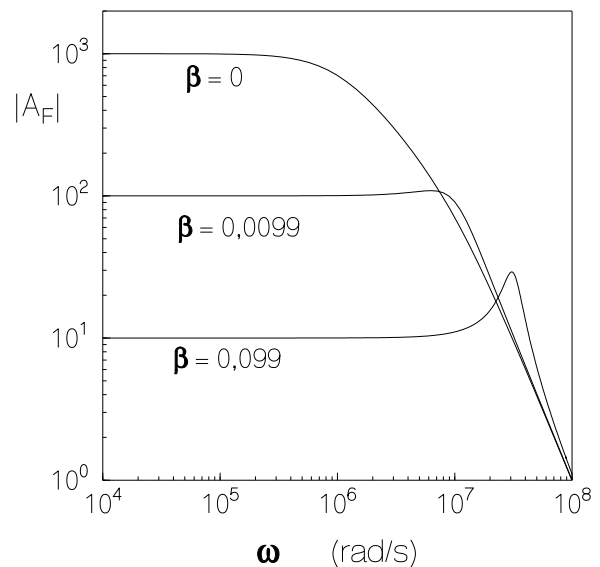
---

<sup>10</sup> Qui il fattore di reazione  $D_0$  va calcolato a centro banda, cioè nella regione di frequenza in cui  $A(s)$  è reale e assume valore  $A_0$ .

dove il guadagno  $A_{F0}$  è dato dalla (23) e  $D_0$  rappresenta il fattore di reazione in continua.

Ricavando dal denominatore della (30) l'espressione dei poli a ciclo chiuso, si trova che se i due poli del blocco diretto sono molto distanti fra loro ( $k$  molto diverso dall'unità), e dunque vi è un polo dominante che determina la banda passante, valori moderati del fattore di reazione conducono effettivamente a uno spostamento del primo polo e dunque a un allargamento della banda come nel caso del polo semplice che abbiamo considerato prima.

Tuttavia, al crescere del valore del fattore di reazione, per qualsiasi posizione iniziale dei poli della (29), i poli della funzione di trasferimento a ciclo chiuso (30) diventano complessi coniugati, con parte reale negativa costante e parte immaginaria via via crescente. In queste condizioni il sistema viene ad assumere un comportamento risonante simile a quello di un circuito RLC, con un picco nella risposta in frequenza e risposta temporale di tipo oscillante. I parametri caratteristici della corrispondente funzione del secondo ordine si determinano uguagliando il denominatore della (30) con l'espressione standard  $1+2\xi s/\omega_0 + (s/\omega_0)^2$ .



Si ottengono così le relazioni

$$(31) \quad \omega_0 = \sqrt{kD_0}/\tau \quad ; \quad \xi = \sqrt{\frac{k}{D_0}} \frac{1+1/k}{2}$$

che mostrano che al crescere del fattore di reazione  $D_0$  il coefficiente di smorzamento tende a zero mentre tendono all'infinito la pulsazione di risonanza  $\omega_0$  e il fattore di merito ( $Q = 1/2\xi$ ). La seconda delle (31) permette, in fase di progetto, di stabilire l'entità di controreazione ammissibile perchè il coefficiente di smorzamento  $\xi$  resti maggiore di un valore prefissato.

Questo particolare comportamento, per cui il sistema controreazionato diventa un filtro a banda stretta, deriva dal fatto che ora ad alta frequenza<sup>11</sup> si ha reazione positiva, anzichè negativa, a causa della rotazione di fase introdotta dai due poli, che tende asintoticamente a  $-\pi$  (valore corrispondente a una inversione di segno della funzione di trasferimento a ciclo aperto). L'instabilità

<sup>11</sup> Si noti che reazione positiva può aversi anche a bassa frequenza, quando la funzione di trasferimento del blocco diretto presenta due o più zeri a bassa frequenza (tipicamente nell'origine). In tali casi lo sfasamento sarà in anticipo, anzichè in ritardo, ma il suo effetto è il medesimo.



non si raggiunge<sup>12</sup> proprio perchè la fase, che non può (ma solo in assenza di altri effetti) eccedere  $-\pi$ , raggiunge tale valore a frequenza infinita, dove il modulo della funzione di trasferimento a ciclo aperto si annulla.

L'instabilità, invece, si può certamente raggiungere quando la funzione di trasferimento a ciclo aperto possiede tre o più poli, e allora la fase asintotica eccede il limite di  $-\pi$ . In questi casi diventa necessaria una analisi dettagliata, che va oltre i limiti di questa trattazione,

Qui ci limitiamo a fornire due indicazioni di natura pratica. La prima è che, reazionando circuiti con più poli, il problema della stabilità è tanto più gravoso quanto più prossime fra loro sono le costanti di tempo, in particolare le due più lunghe. La seconda è che il comportamento dei circuiti con più di due poli, per valori moderati del fattore di reazione, può essere approssimato con quello di un circuito a due poli (corrispondenti alle due costanti di tempo dominanti); sicchè in prima approssimazione si possono usare le relazioni (31).

Nella precedente discussione sui possibili effetti di reazione positiva, e sul rischio di instabilità, abbiamo sempre considerato, per semplicità, funzioni a ciclo aperto con poli reali, ma prive di zeri. La presenza di zeri, ovviamente, modifica il quadro grazie all'anticipo di fase che questi introducono, con uno sfasamento asintotico ad alta frequenza che è dato da  $-\pi/2(n-m)$ , dove  $n$  è il numero dei poli e  $m$  quello degli zeri. Si capisce, allora, che la presenza di zeri, eventualmente introdotti ad hoc, può alleviare notevolmente il problema della reazione positiva e dell'instabilità.

Per studiare la stabilità di un sistema caratterizzato da un data funzione di trasferimento a ciclo aperto, di solito si tracciano i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione e si controlla che alla frequenza a cui il modulo assume valore unitario (0 dB) la fase non ecceda  $-\pi$ . Dove infatti si avesse  $|A\beta| = 1$  e  $\angle A\beta = -\pi$ , sarebbe  $|D| = 0$  e si avrebbe quindi l'instabilità.

In generale, per ottenere le condizioni atte ad assicurare la stabilità di un sistema reazionato, la soluzione più semplice, sebbene non sempre praticabile, consiste nel modificare la funzione di trasferimento a ciclo aperto in modo da ricondurla, più o meno approssimativamente, alla presenza di un polo dominante. Ciò si ottiene introducendo nella funzione poli e zeri reali addizionali, in opportune posizioni. Un esempio classico riguarda l'impiego della tecnica del polo dominante nella progettazione degli operazionali, iniziata con l'introduzione, nel lontano 1968, dell'amplificatore 741, dotato di una compensazione interna che realizza appunto il primo polo.

---

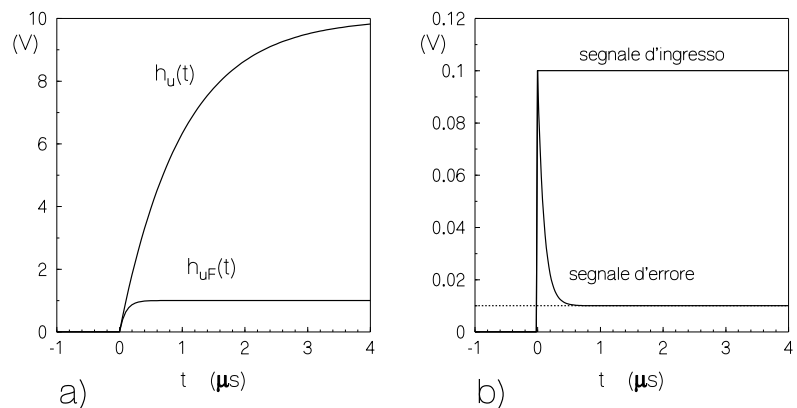
<sup>12</sup> Anche circuiti con due poli, in pratica, possono dar luogo a instabilità: il valore di  $-\pi$ , infatti, può venire raggiunto a frequenze finite a causa dello sfasamento associato a ritardi non rappresentati nel modello a due poli.

## 6. La risposta dinamica nel dominio del tempo

L'esame nel dominio del tempo della risposta dinamica degli amplificatori reazionati presenta notevole interesse, sia per una miglior comprensione dell'effetto della reazione negativa sia per lo studio dei fenomeni di distorsione che possono verificarsi nel transistoro.

Per fissare le idee, consideriamo un amplificatore con un solo polo reale, descritto dalla (21), con  $A_0 = 100$ ,  $\tau = 1\mu\text{s}$  e  $\beta = 0,09$ . Il fattore di reazione in continua è dunque  $D_0 = 10$  e usando le (23) si ha  $A_{F0} = 10$ ,  $\tau_F = 0,1\mu\text{s}$ . La risposta al gradino unitario dell'amplificatore non reazionato è  $h_u(t) = A_0(1-\exp(-t/\tau))u(t)$ , quella dell'amplificatore reazionato  $h_{uF}(t) = A_{F0}(1-\exp(-t/\tau_F))u(t)$ .

Nel grafico a) sono tracciate le due risposte a un gradino di ampiezza 0.1 volt. Si noterà che la parte iniziale delle risposte è la medesima; in particolare, la velocità di salita iniziale dell'uscita è identica nei due casi e non è dunque influenzata in alcun modo dalla



controreazione. Il motivo è semplice: il segnale di reazione  $\beta V_o$  è evidentemente nullo all'istante di applicazione del gradino ed è comunque piccolo (rispetto al valore che assumerà a regime) durante la fase iniziale del transitorio, quando il segnale d'uscita è ancora lontano dal suo valore asintotico. Inizialmente, quindi, il segnale d'errore coincide praticamente con il gradino d'ingresso (come mostra la parte b)), l'uscita con quella che si avrebbe in assenza di reazione.

Quanto appena detto pone in rilievo un aspetto della reazione negativa a cui non sempre si pone la debita attenzione: cioè la presenza di un ritardo lungo tutto l'anello di reazione, dal segnale d'errore  $V_e$  al segnale di reazione  $\beta V_o$ , che dipende dalla funzione di trasferimento a ciclo aperto.

Una importante conseguenza di ciò è che, in presenza di variazioni a gradino dell'ingresso, il segnale d'errore è a sua volta sempre soggetto a variazioni a gradino della stessa ampiezza, la quale può essere anche assai maggiore di quella che si raggiungerà al termine del transitorio. In tali condizioni, se la dinamica del circuito d'ingresso dell'amplificatore non è sufficiente, può darsi che esso esca dalla linearità, provocando quindi distorsione nonlineare. Questo fenomeno prende il

nome di *distorsione transitoria*, dato che si estingue al termine della fase iniziale della risposta transitoria dell'amplificatore. Si noti che tutto il transitorio, in presenza di non linearità nello stadio d'ingresso, può subire un notevole allungamento rispetto a quanto si avrebbe in condizioni di linearità. Il caso limite è quello in cui la saturazione del primo stadio porta l'uscita ad assumere la forma di una rampa, con velocità di salita approssimativamente costante (fenomeno caratterizzato dalla grandezza chiamata "*slew rate*", di particolare importanza nello studio degli amplificatori operazionali).

Nella parte b) della figura a pagina precedente è tracciato il grafico dell'andamento del segnale d'errore nell'amplificatore, ottenuto ricavando la funzione

$$A_e(s) = \frac{V_e(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + A_0\beta/(1 + s\tau)} = \frac{1}{1 + A_0\beta} \frac{1 + s\tau}{1 + s\tau/(1 + A_0\beta)}$$

e poi antitrasformando il prodotto di tale funzione per la trasformata del gradino d'ingresso  $V_i(s) = 0,1/s$ . Mentre lasciamo al lettore il calcolo come esercizio, notiamo subito che il valore iniziale del segnale d'errore, applicando il teorema del valore iniziale, è

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sA_e(s) \frac{0,1}{s} = 0,1 V \quad \text{come previsto in base alle considerazioni precedenti.}$$

L'analisi nel dominio del tempo illumina anche altri aspetti delle proprietà della risposta dinamica dei sistemi reazionati. Per esempio, il fatto che generalmente i problemi della stabilità diventino via via più gravosi all'aumentare del numero di poli della funzione di trasferimento a ciclo aperto deriva dal diverso modo con cui i due tempi caratteristici fondamentali, tempo di salita e ritardo, dipendono dal numero e dai valori delle costanti di tempo del circuito. Infatti, al crescere del numero delle costanti di tempo in gioco, il ritardo lungo l'anello di reazione, che interviene a determinare i fenomeni di reazione positiva e di instabilità, cresce più rapidamente del tempo di salita, che determina invece la velocità con cui cresce l'ampiezza dell'uscita e conseguentemente del segnale di reazione in modo che esso possa esercitare la sua azione correttiva. Sappiamo infatti che se  $n$  è il numero delle costanti di tempo, supposte tutte uguali fra loro, il tempo di salita è proporzionale a  $\sqrt[n]{n}$ , il ritardo a  $n$ .

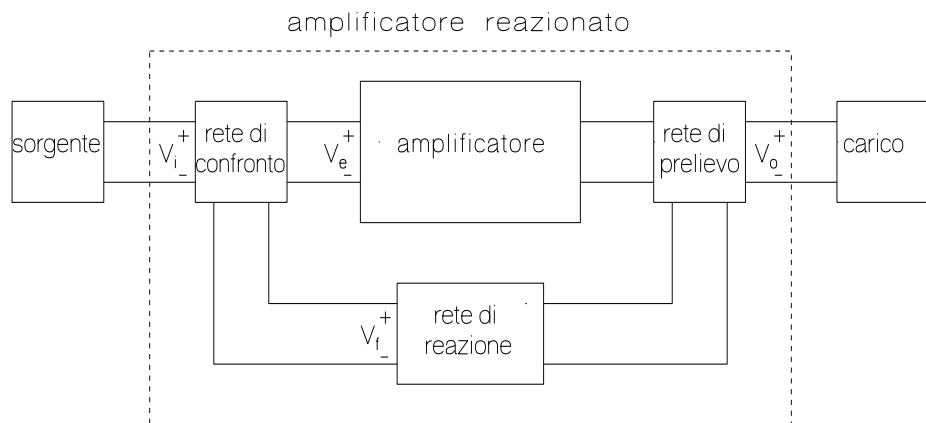
# UN MODELLO PIU' GENERALE PER GLI AMPLIFICATORI A CONTROREAZIONE

## 7. Un modello più generale

La rappresentazione degli amplificatori a controreazione in termini di due blocchi unilaterali, indipendenti e non interagenti fra loro, secondo lo schema di pagina 1, sebbene utilissima per la comprensione e l'analisi delle proprietà fondamentali della controreazione, non copre certamente la varietà dei casi possibili. La trattazione generale<sup>13</sup> della controreazione, d'altra parte, richiede un diverso approccio, nel quale si viene però a perdere il significato intuitivo delle grandezze fondamentali della controreazione.

In quanto segue, per trattare più in dettaglio gli amplificatori a controreazione, mantenendo però la discussione a un livello sufficientemente intuitivo, non utilizzeremo l'approccio generale di Bode, facendo tuttavia riferimento a un modello più generale di quello considerato finora, che consente di discutere efficacemente le proprietà della maggior parte dei circuiti di interesse pratico. Questo ci permetterà di stabilire un criterio di classificazione degli amplificatori reazionati e di studiare l'effetto della reazione sulle impedenze d'ingresso e d'uscita.

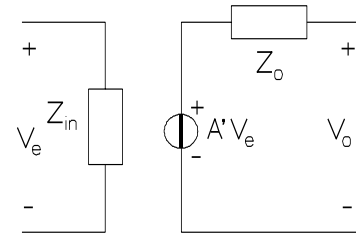
Il modello che consideriamo qui, mostrato nella figura, rappresenta la struttura di un amplificatore a controreazione dotato di un solo anello di reazione<sup>14</sup>. Le parti essenziali di questo modello sono l'amplificatore base, la rete di reazione, il circuito di confronto e il circuito di prelievo.



<sup>13</sup> Quello introdotto da H.W.Bode nel testo *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, Princeton, 1945.

<sup>14</sup> Si considerano a un solo anello di reazione anche gli amplificatori in cui sono presenti anelli di reazione locale nei circuiti che li costituiscono (per esempio, uno stadio a emettitore comune con una resistenza d'emettitore).

Rappresentiamo l'amplificatore del blocco diretto con il circuito equivalente mostrato nella figura a fianco, costituito da una sorgente reale di tensione controllata in tensione, dove è implicita l'ipotesi di *unilateralità*, che per questo oggetto è generalmente ben verificata in pratica. Già sappiamo (vedi parte II) che a tale modello è riconducibile qualsiasi altro tipo di amplificatore (amplificatori a transimpedenza e a transammettenza, amplificatori di corrente) mediante opportune scelte dei valori dei parametri.



Per tener conto della non unilateralità della rete di reazione<sup>15</sup>, che si traduce nella trasmissione di segnale fra ingresso e uscita anche quando la sorgente controllata dell'amplificatore viene disattivata, introduciamo la funzione  $\gamma(s)$ , scrivendo l'uscita nella forma seguente

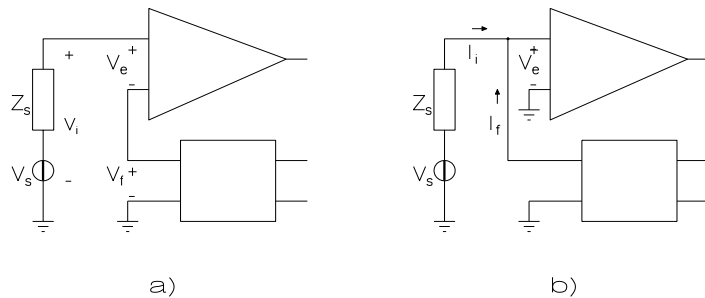
$$(32) \quad V_o(s) = A(s)V_e(s) + \gamma(s)V_i(s)$$

dove la funzione  $A(s)$  (generalmente diversa da quella  $A'(s)$  associata alla sorgente controllata dell'amplificatore) tiene conto della presenza dei carichi collegati all'uscita dell'amplificatore.

Il *circuito di confronto*, all'ingresso dell'amplificatore, provvede alla generazione del segnale d'errore effettivamente applicato all'amplificatore, attraverso la seguente combinazione lineare del segnale d'ingresso e di quello di reazione

$$(33) \quad V_e(s) = \alpha(s)V_i(s) - V_f(s)$$

dove  $\alpha(s)$  rappresenta l'attenuazione del segnale d'ingresso (eventualmente introdotta dal circuito di confronto oppure dall'interazione fra l'impedenza della sorgente e l'ingresso dell'amplificatore) e il segnale di reazione è, come nel caso considerato inizialmente:



$$(34) \quad V_f(s) = \beta(s)V_o(s)$$

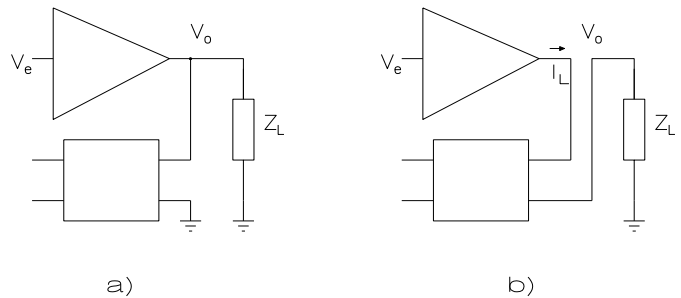
La natura del circuito di confronto stabilisce come tale confronto avviene effettivamente. Si ha reazione di tipo *serie* (fig. a) oppure di tipo *parallelo* (fig. b), a seconda che il segnale di reazione sia applicato in serie oppure in parallelo, rispetto al segnale d'ingresso, all'ingresso

<sup>15</sup> Che è realizzata usualmente con elementi passivi.

dell'amplificatore. Nella reazione serie il segnale d'errore deriva da un confronto diretto fra tensioni, nella reazione parallelo lo determina invece un confronto fra correnti ( $I_i$  e  $I_f$  in figura).

Questa differenza ha importanti conseguenze per quanto riguarda l'impedenza d'ingresso dell'amplificatore reazionato: la reazione serie tende ad innalzarla, quella parallelo a diminuirla, rispetto a quanto si ha in assenza di reazione.

Il *circuito di prelievo* (o di campionamento), posto all'uscita dell'amplificatore, stabilisce se il segnale riportato in ingresso è proporzionale alla tensione d'uscita  $V_o$  oppure alla corrente d'uscita, intesa come la corrente che scorre nel carico. Nel primo caso si parla di *reazione di tensione*: l'ingresso della rete di reazione è collegato in parallelo all'uscita dell'amplificatore (fig.



a). Nel secondo si parla di *reazione di corrente*: la porta d'ingresso della rete di reazione è disposta in serie al carico, in modo da essere attraversata dalla corrente che vi scorre (fig. b).

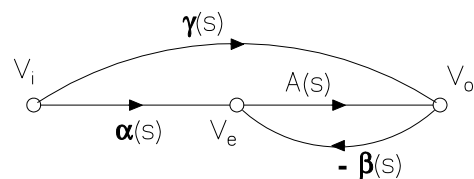
Questa differenza ha importanti conseguenze per quanto riguarda l'impedenza d'uscita dell'amplificatore reazionato: la reazione di corrente tende ad innalzarla, quella di tensione a diminuirla, rispetto a quanto si ha in assenza di reazione.

L'espressione della funzione di trasferimento a ciclo chiuso dell'amplificatore reazionato si ricava dalle (32) e (33) nella forma seguente:

$$(35) \quad A_F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\alpha(s)A(s) + \gamma(s)}{1 + A(s)\beta(s)}$$

che rappresentiamo nel grafo mostrato a fianco.

In molti casi pratici, in realtà, il contributo di  $\gamma(s)$  è trascurabile. Si può dire comunque che la trasmissione diretta fra ingresso e uscita attraverso la rete di reazione diventa apprezzabile quando l'impedenza d'uscita dell'amplificatore interno non è trascurabile rispetto al carico complessivo.



Notiamo infine che anche nel modello che abbiamo introdotto qui le proprietà fondamentali della reazione negativa esaminate in precedenza dipendono dalle funzioni  $L(s)$  e  $D(s)$ , che restano definite dalle espressioni (4) e (5).

## 8. Classificazione e proprietà degli amplificatori reazionati

La possibilità di individuare due diversi tipi di circuiti di confronto e due diversi tipi di circuiti di prelievo consente di classificare gli amplificatori a controreazione in quattro classi<sup>16</sup>, ciascuna delle quali gode di particolari proprietà circa l'effetto della reazione sulla relazione ingresso-uscita sia sulle impedenze d'ingresso e di uscita del circuito complessivo:

- **amplificatori a reazione di tensione in serie;**
- **amplificatori a reazione di tensione in parallelo;**
- **amplificatori a reazione di corrente in serie;**
- **amplificatori a reazione di corrente in parallelo.**

La connessione più classica ed elementare è evidentemente quella dell'amplificatore a reazione di tensione in serie, che meglio corrisponde allo schema semplificato di pag. 1. Qui il segnale di reazione a) è direttamente proporzionale alla tensione d'uscita, b) viene confrontato direttamente con la tensione d'ingresso per generare il segnale d'errore applicato all'amplificatore. Si comprende immediatamente che l'effetto della reazione consiste nello stabilizzare la relazione fra tensione d'ingresso e tensione d'uscita: ne consegue che al crescere del fattore di reazione il comportamento globale del circuito tende a quello di un generatore ideale di tensione controllato in tensione. E quindi l'impedenza d'ingresso aumenta rispetto a quella in assenza di reazione, l'impedenza d'uscita diminuisce.

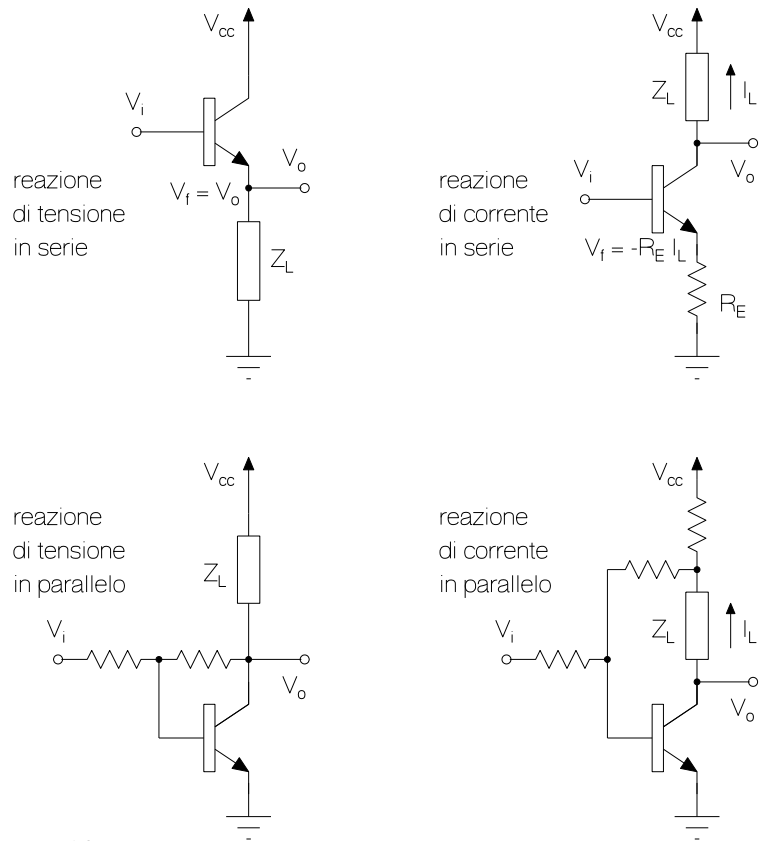
Analoghi ragionamenti, applicati alle altre tre classi di amplificatori a reazione, consentono di individuarne le proprietà essenziali, che sono raccolte nella tabella a pagina seguente. Naturalmente le cose cambiano nel caso di reazione positiva anziché negativa: le impedenze d'ingresso e d'uscita, in particolare, variano in senso opposto a quanto riportato nella tabella.

**Tabella. Proprietà delle quattro classi di amplificatori a reazione negativa**

classe di amplificatore a reazione negativa	la reazione stabilizza la seguente relazione ingresso-uscita	rispetto al circuito non reazionato l'impedenza		modello ideale di riferimento
		d'ingresso	d'uscita	
reazione di tensione in serie	tensione-tensione	aumenta	diminuisce	amplificatore di tensione
reazione di tensione in parallelo	corrente-tensione	diminuisce	diminuisce	ampl. a transimpedenza
reazione di corrente in serie	tensione-corrente	aumenta	aumenta	ampl. a transammettenza
reazione di corrente in parallelo	corrente-corrente	diminuisce	aumenta	amplificatore di corrente

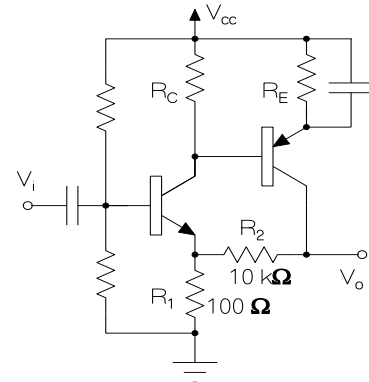
<sup>16</sup> Deve essere chiaro tuttavia che non tutti gli amplificatori a controreazione rientrano in questa classificazione: si possono, infatti realizzare anche schemi in cui sia il confronto che il prelievo possono essere di tipo misto, schemi con più cicli di reazione, ecc.

Nella figura sono mostrati (attenzione: a titolo puramente esemplificativo) gli schemi dei quattro tipi di amplificatori a reazione negativa realizzati usando come amplificatore un transistor bipolare (e pertanto con inversione di segno quando il carico è disposto nel circuito del collettore). Ma solo i due schemi a reazione in serie (inseguitore d'emettitore e amplificatore con reazione d'emettitore) sono usati in pratica come amplificatori di segnale.



**Esempio. Amplificatore a reazione a due stadi con transistori bipolari.**

Lo schema mostrato nella figura rappresenta un amplificatore a reazione di tensione in serie a due stadi. La rete di reazione è costituita dal partitore  $R_1, R_2$ , con  $\beta \approx R_1/R_2$  essendo  $R_2 \gg R_1$ . L'amplificatore interno è costituito da due transistori (il primo NPN, il secondo PNP) accoppiati in continua. Nella regione di frequenza dove possiamo considerare trascurabili le impedenze dei condensatori, supponendo inoltre  $h_{ie2} \ll R_C$ , il guadagno a ciclo aperto è  $A \approx h_{fe1}h_{fe2}(R_2/h_{ie1})$ .



Introducendo i valori numerici si ha  $\beta = 0,01$ ,  $A \approx 10^4 \times 10^3 / 10^3 = 10^4$ ,  $D \approx A\beta \approx 100$ ,  $A_F \approx 1/\beta \approx 100$ .

**Esercizio.** Scegliere i valori dei componenti dell'amplificatore discusso nell'Esempio precedente in modo che funzioni correttamente, assumendo  $V_{BE} = 0,7$  volt e  $h_{fe} = 100$ . Analizzare in continua il circuito, determinando le tensioni dei nodi e le correnti di polarizzazione dei dispositivi. Utilizzando questi risultati (e assumendo per i due transistori  $r_{bb'} = 100 \Omega$  e  $\eta = 1$ ) calcolare il guadagno dell'amplificatore interno e dell'amplificatore reazionato e verificare la validità delle approssimazioni fatte nell'Esempio precedente.



## 9. L'effetto della reazione sulle impedenze d'ingresso e d'uscita

Torniamo ora a considerare l'amplificatore a reazione di tensione in serie, per determinare quantitativamente l'effetto della reazione sulle impedenze d'ingresso e d'uscita. Notiamo innanzitutto che in assenza di reazione queste impedenze coincidono con quelle dell'amplificatore base, come mostrato nelle figure a pag. 21 e 22.

L'impedenza d'ingresso  $Z_{inF}$  in presenza di reazione si ricava esaminando, nella parte a) della figura a pag. 21, lo schema del circuito d'ingresso:

$$(36) \quad Z_{inF} = (V_e + V_f) / I_i$$

dove  $I_i$  è la corrente che scorre attraverso l'impedenza  $Z_{in}$  dell'amplificatore, per cui in assenza di reazione, cioè quando  $\beta = 0$  e  $V_f = 0$ , si ha evidentemente  $V_e/I_i = Z_{in}$ . Sostituendo nella (36)  $V_f = A\beta V_e$  e trascurando  $\gamma(s)$  si ha<sup>17</sup>:

$$(37) \quad Z_{inF} = Z_{in} (1 + V_f / V_e) = Z_{in} (1 + A\beta)$$

Notiamo che questo risultato vale per tutti gli amplificatori a reazione serie (sia di tensione che di corrente). Negli amplificatori a reazione parallelo, invece, la reazione negativa riduce l'impedenza d'ingresso dello stesso fattore  $1 + \beta A$ ; questo caso, data la sua grande importanza pratica, lo esamineremo in maggior dettaglio nel seguito, occupandoci degli amplificatori operazionali.

L'impedenza d'uscita di un amplificatore a reazione di tensione si può ricavare in vari modi. Per esempio immaginando di applicare un generatore di corrente esterno  $I$  in parallelo all'uscita del circuito in assenza di segnale d'ingresso ( $V_i = 0$ ), e rappresentando l'amplificatore interno come indicato nella figura in alto a pag. 21. In assenza di reazione ( $\beta = 0$ ,  $V_e = 0$ ) la tensione d'uscita  $V_o(I)$  sarà determinata esclusivamente dalla caduta sull'impedenza  $Z_o$ :  $V_o(I) = Z_o I$ . In presenza di reazione, d'altra parte, a questa caduta si sommerà il contributo del generatore controllato. Questo, se la tensione d'uscita è  $V_{of}(I)$  e il corrispondente segnale d'errore è  $V_e = -\beta V_{of}(I)$ , è  $\beta A' V_{of}(I)$ . La tensione d'uscita complessiva è dunque

$$(38) \quad V_{of}(I) = Z_o I - \beta A' V_{of}(I)$$

---

<sup>17</sup> E' utile osservare che l'effetto della reazione negativa sull'impedenza d'ingresso non si manifesta, evidentemente, per quanto riguarda il circuito di polarizzazione. Nello schema in basso a pag. 24, per esempio, l'innalzamento dell'impedenza d'ingresso riguarda quella vista guardando nella base del primo transistor, ma non il contributo della rete di polarizzazione.

Da questa espressione si ricava  $V_{of}(I)$  e dal rapporto  $V_{of}(I)/I$  l'impedenza d'uscita:

$$(39) \quad Z_{of} = Z_o / (1 + \beta A')$$

che viene ridotta dalla reazione, in accordo col fatto che il comportamento di questo tipo di amplificatore, al crescere del fattore di reazione, tende a quello di un generatore ideale di tensione.

Si noti che questo calcolo è stato eseguito in assenza di carico esterno, sicché nella (39) figura il guadagno a circuito aperto  $A'$ . Allo stesso risultato si arriva anche tenendo conto della presenza del carico. In tal caso, usando la seguente espressione della funzione di trasferimento del blocco diretto in termini dei parametri dell'amplificatore e del carico

$$A(s) = A'(s) Z_L / (Z_L + Z_o)$$

e sostituendo la (33) e la (34) nella (32) (trascurando ancora  $\gamma(s)$ ), si ottiene per il rapporto  $V_o/V_i$

$$(40) \quad A_F = \frac{\alpha A' Z_L / (Z_L + Z_o)}{1 + \beta A' Z_L / (Z_L + Z_o)} = \frac{\alpha A'}{1 + \beta A' Z_L + Z_o / (1 + \beta A')}$$

Esaminando tale espressione si osserva che l'impedenza d'uscita in presenza di reazione è data dalla (39), già trovata prima.

Questi risultati, per come sono stati ottenuti, sono evidentemente validi per qualsiasi amplificatore a reazione di tensione (sia in serie che in parallelo). Negli amplificatori a reazione di corrente, dove il segnale di reazione è proporzionale alla corrente che scorre nel carico, la reazione negativa innalza, anziché ridurre, l'impedenza d'uscita. Nel caso estremo di desensibilizzazione totale, in particolare, il segnale d'ingresso determina la corrente d'uscita, che scorre nel carico esterno, indipendentemente dal valore del carico; cioè l'impedenza d'uscita è infinita.

## GLI AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

### 10. Gli amplificatori operazionali

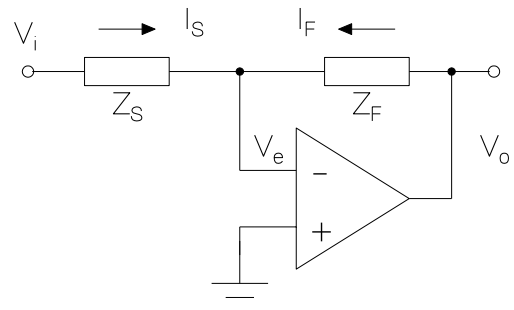
Gli amplificatori a reazione di tensione in parallelo presentano, come si è già accennato, una particolare importanza dal punto di vista pratico. Tale configurazione è infatti usata comunemente nell'impiego degli **amplificatori operazionali**<sup>18</sup> (*operational amplifiers, Op Amps*), che sono costituiti da un amplificatore di tensione invertente (generalmente in forma integrata) ad altissimo guadagno (tipicamente fra  $10^4$  e  $10^7$ ), contornato da opportuni componenti esterni.

Questi circuiti trovano oggi larghissimo impiego in quanto costituiscono il modulo elementare fondamentale dell'elettronica analogica, usato per realizzare amplificatori, filtri e una estesa varietà di altri circuiti, lineari e nonlineari. L'introduzione dei circuiti operazionali risale agli anni '40 quando vennero introdotti per realizzare le operazioni matematiche fondamentali (da cui il nome) per risolvere le equazioni differenziali nei *calcolatori analogici*: inversione di segno, addizione, integrazione rispetto al tempo. I primi operazionali vennero costruiti usando tubi elettronici ed erano dunque costosi e ingombranti, mentre i dispositivi integrati usati oggi sono assai economici, occupano spazi ridottissimi e richiedono una bassissima potenza di alimentazione.

Dato l'altissimo guadagno dell'amplificatore base, i circuiti operazionali lavorano generalmente in condizioni di desensibilizzazione pressoché totale: il loro comportamento è allora determinato essenzialmente dai componenti discreti esterni usati nelle reti di confronto e di reazione. In questa approssimazione l'analisi e il progetto dei circuiti diventano assai agevoli.

### 11. Analisi semplificata nell'approssimazione di guadagno infinito

Consideriamo lo schema fondamentale di un amplificatore operazionale (invertente) mostrato in figura. Se il guadagno dell'amplificatore interno è così elevato da poter trascurare l'ampiezza del segnale d'errore applicato all'amplificatore rispetto a quella dei segnali d'ingresso e d'uscita del circuito, la corrente nell'impedenza  $Z_S$  sarà  $I_S = V_{in}/Z_S$ , quella nell'impedenza  $Z_F$  sarà  $I_F = V_o/Z_F$ . Dato che la tensione  $V_e$



<sup>18</sup> Si noti che questo termine è usato indifferentemente per indicare sia i moduli integrati che i circuiti con essi realizzati.

fra i terminali d'ingresso dell'amplificatore è trascurabile rispetto sia a  $V_i$  che a  $V_o$ , la corrente che scorre attraverso la sua impedenza d'ingresso sarà a sua volta trascurabile rispetto sia a  $I_S$  che a  $I_F$ . Applicando la prima legge di Kirchhoff si conclude pertanto che  $I_S + I_F = 0$ , da cui si ottiene la nota relazione<sup>19</sup>

$$(42) \quad A_F = V_o/V_i = -Z_F/Z_S$$

Il nodo d'ingresso dell'amplificatore, in questa configurazione, è chiamato **terra virtuale**: "terra" perché la sua tensione coincide praticamente con quella del riferimento di massa in quanto trascurabile<sup>20</sup> rispetto alle tensioni d'ingresso e d'uscita, ma "virtuale" perché fra tale nodo e massa non scorre corrente apprezzabile, a differenza di una massa reale.

Notiamo che l'espressione (42) è esatta solo nell'ipotesi di guadagno infinito dell'amplificatore. Si tratta dunque di un'espressione approssimata, dove l'approssimazione è però ottima nella maggior parte dei casi di interesse pratico. D'altra parte il guadagno di un tipico operazionale integrato, altissimo e reale alle basse frequenze, è una grandezza complessa dipendente dalla frequenza: il suo modulo è pressoché costante dalla continua fino alla frequenza di taglio, che tipicamente si trova nella regione delle decine di hertz e poi diminuisce con pendenza di -20 dB/decade. Ne consegue che l'approssimazione alla base della (42) ha senso soltanto in una regione di frequenze limitata superiormente.

Un criterio pratico per garantire che l'approssimazione di guadagno infinito sia ragionevolmente verificata, e di conseguenza i circuiti si trovino in condizioni di desensibilizzazione pressoché totale, può essere basato sulla seguente considerazione: in un amplificatore a reazione negativa il modulo  $|A_F|$  della funzione di trasferimento a ciclo chiuso non può eccedere il modulo  $|A|$  del guadagno dell'amplificatore interno, e deve essere anzi minore del rapporto fra  $|A|$  e il modulo  $|D|$  del fattore di reazione. La conoscenza dell'andamento del modulo del guadagno dell'amplificatore in funzione della frequenza consente dunque di scegliere, sempre in funzione della frequenza, il massimo valore del modulo del rapporto delle impedenze che, in base alla (42), determina la funzione  $A_F$ . E quindi questo dovrà evidentemente soddisfare, per tutte le frequenze di interesse, la condizione  $|Z_F/Z_S| \ll |A|$ . Con un grado di desensibilizzazione, e dunque di precisione, dato dal rapporto fra  $|A|$  e  $|Z_F/Z_S|$ .

---

<sup>19</sup> Questa mostra che l'amplificatore operazionale invertente si comporta in modo simile a una leva, con il fulcro disposto nel punto corrispondente all'ingresso dell'amplificatore e i bracci di lunghezza proporzionale ai moduli delle due impedenze. Ma è proprio così?

<sup>20</sup> Il motivo di ciò è assai semplice: la tensione d'ingresso è quella d'uscita divisa per il guadagno a ciclo aperto, che è generalmente altissimo.

**Esempio. Errore dell'approssimazione di guadagno infinito.**

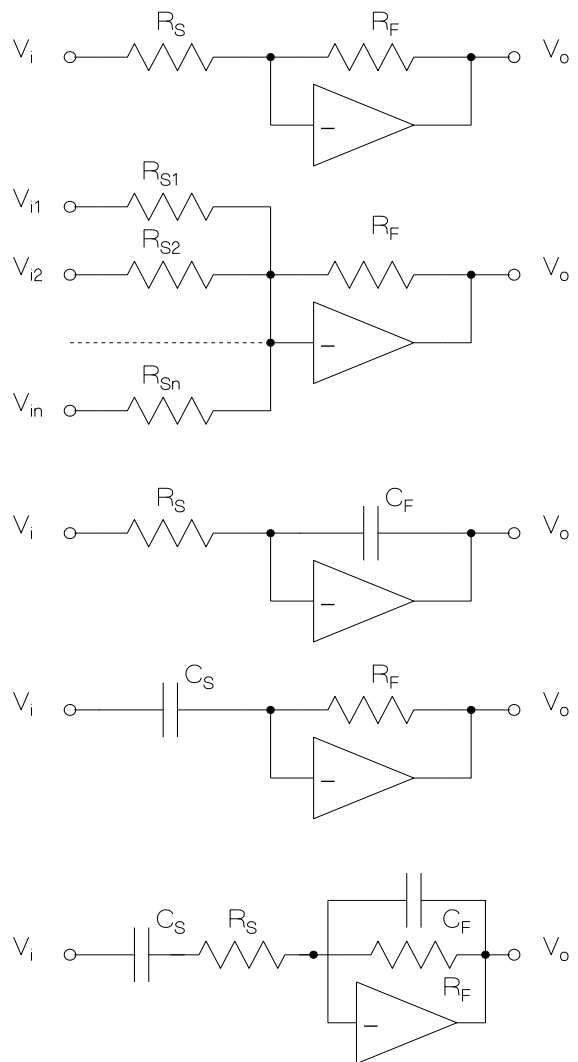
Consideriamo il circuito in figura a pag. 27 con  $Z_S = 1000 \Omega$  e  $Z_F = 100 \text{ k}\Omega$ , realizzato usando un amplificatore con  $|A| = 10^6$ , frequenza di taglio  $f_A = 10 \text{ Hz}$ , e  $R_{in} = 100 \text{ k}\Omega$ . Nella approssimazione di guadagno infinito si ha  $A_F = -100 \text{ k}\Omega/1000 \Omega = -100$ . Valutiamo l'errore commesso con l'approssimazione  $I_S + I_F = 0$ : il segnale sulla terra virtuale è  $|V_e| \approx |V_o/10^6| \approx |V_i/10^4|$ , e dunque la corrente che scorre attraverso la resistenza d'ingresso dell'amplificatore è  $I_{in} = V_e/R_{in} \approx |V_o/10^{11}|$ . Questa va confrontata con le correnti  $I_S \approx I_F \approx V_o/10^5$ , che sono  $10^6$  volte più intense. Ma l'errore dominante della approssimazione di guadagno infinito è quello che interviene nel calcolo di  $I_S$ , quando si trascurando  $V_e$  rispetto a  $V_{in}$ , che qui è dell'ordine di  $10^{-3}$ . E' poi evidente che alla frequenza di 1 kHz, dove il guadagno dell'amplificatore si riduce a  $10^4$ , l'errore che si commette è dell'ordine del 10% ed è quindi tutt'altro che trascurabile.

Nella figura sono mostrati alcuni schemi elementari d'impiego degli amplificatori operazionali. Il primo realizza un amplificatore di tensione (che come tutti questi circuiti presenta inversione di segno). Il guadagno ingresso-uscita è stabilito semplicemente dal rapporto fra la resistenza di reazione e quella d'ingresso:

$$(43) \quad A_F \approx -R_F/R_S$$

dove evidentemente l'approssimazione è buona soltanto finché il guadagno dell'amplificatore interno è molto maggiore di quello stabilito dal rapporto delle resistenze. Se i due resistori hanno lo stesso valore, allora il circuito inverte semplicemente il segno del segnale.

Il secondo circuito realizza idealmente la funzione di sommatore, fornendo in uscita un segnale proporzionale alla somma pesata dei segnali d'ingresso. Seguendo gli stessi ragionamenti usati per



ricavare la (42) si ha infatti

$$(44) \quad V_o \approx -R_F \sum_i V_{ii} / R_{Si}$$

Il terzo circuito realizza idealmente la funzione di integratore (detto anche integratore puro per distinguerlo da quelli realizzati mediante circuiti RC). Dalla (42) si ha infatti

$$(45) \quad A_F(s) \approx -1/sR_S C_F$$

Si noti peraltro che questa espressione perde senso alle bassissime frequenze (cioè ai tempi molto lunghi) e in particolare in continua, dove  $|A_F|$  dovrebbe assumere valore infinito, mentre il guadagno dell'amplificatore interno è finito e anche il modulo dell'impedenza di reazione in pratica è finito, a causa della resistenza di perdita parallelo del condensatore. Comunque la funzione espressa dalla (45) può essere ben realizzata in pratica con ottima approssimazione in una banda di frequenze limitata sia inferiormente che superiormente.

Il quarto circuito realizza idealmente la funzione di derivatore (detto anche derivatore puro per distinguerlo da quelli realizzati mediante circuiti CR). Dalla (42) si ha infatti

$$(46) \quad A_F(s) \approx -sR_F C_S$$

E' evidente che tale espressione perde senso alle alte frequenze (cioè ai tempi brevi), dato che  $|A_F|$  dovrebbe tendere all'infinito con la frequenza. Tuttavia è possibile realizzare derivatori che funzionano ragionevolmente bene in una regione di frequenze limitata superiormente.

**Esercizio.** Tenendo presente la tipica dipendenza dalla frequenza del guadagno interno di un operazionale, spiegare perché la risposta indiciale del derivatore in figura possa risultare di tipo oscillante. Discutere l'impiego di un resistore ausiliario in serie al circuito d'ingresso.

L'ultimo schema della figura a pag. 29, infine, rappresenta un amplificatore con taglio sia alle basse che alle alte frequenze. Dalla (42) si ha infatti

$$(47) \quad A_F(s) = -\frac{Z_F}{Z_S} = -\frac{R_F}{1 + sR_F C_F} \frac{1}{R_S + 1/sC_S} = -\frac{R_F}{R_S} \frac{sR_S C_S}{(1 + sR_F C_F)(1 + sR_S C_S)}$$

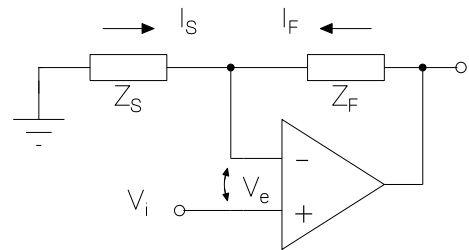
Se  $C_F R_F \ll C_S R_S$  allora la frequenza di taglio inferiore è  $f_1 \approx 1/(2\pi C_S R_S)$ , la frequenza di taglio superiore è  $f_2 \approx 1/(2\pi C_F R_F)$  e il guadagno nella regione delle frequenze intermedie è  $-R_F/R_S$ .

Tutti gli schemi considerati finora, come si è già detto, invertono il segno del segnale e sono chiamati quindi di tipo **invertente**. Gli amplificatori operazionali si usano però spesso anche nella

configurazione detta **non invertente**, mostrata nella figura qui sotto. In tale configurazione si richiede un amplificatore di tipo *differenziale*, cioè dotato di due ingressi, invertente e non invertente, con l'uscita proporzionale alla differenza fra i segnali applicati ai due ingressi (ma tutti gli operazionali integrati usati normalmente oggi sono di tipo differenziale).

Anche lo schema non invertente può essere analizzato nella approssimazione di guadagno infinito. In tal caso, imponendo l'uguaglianza fra i segnali presenti ai due ingressi dell'amplificatore, si ottiene l'espressione

$$(48) \quad A_F = 1 + Z_F/Z_S$$



Quando  $Z_F = 0$  e  $Z_S = \infty$  si ha  $A_F = 1$ : questo circuito prende il nome di *inseguitore di tensione (voltage follower)* perché la tensione d'uscita "insegue" quella d'ingresso. E qui la denominazione di "tensione d'errore" appare particolarmente significativa.

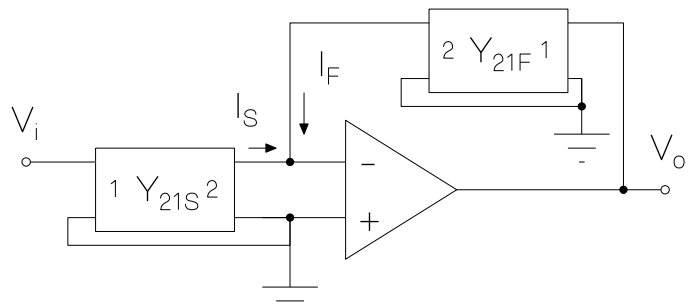
## 12. Realizzazione di funzioni di trasferimento prefissate

Le espressioni (42) e (48) mostrano che è possibile realizzare un'ampia varietà di funzioni di trasferimento attraverso scelte appropriate delle impedenze  $Z_S$  e  $Z_F$ . Queste impedenze sono generalmente realizzate impiegando elementi R e C, date le mediocri caratteristiche degli induttori reali.

Occorre però tenere presente che i poli e gli zeri delle funzioni immittenza (impedenza e ammettenza) dei bipoli costituiti esclusivamente da elementi R e C passivi possono trovarsi solamente sull'asse reale del piano s. Ciò si traduce in una corrispondente limitazione per le funzioni di trasferimento che si possono realizzare utilizzando questi bipoli nel circuito d'ingresso e di reazione di un'operazionale.

Diverso è invece il comportamento delle reti a due porte costituite da elementi R e C, per quanto ne riguarda la transammettenza (ammettenza di trasferimento): mentre i poli di tale funzione si possono trovare solamente sull'asse reale (esclusa l'origine), gli zeri si possono invece trovare in qualsiasi punto del piano complesso. Diventa allora possibile, almeno idealmente, realizzare qualsiasi funzione di trasferimento, con poli e zeri in posizione arbitraria nel piano complesso (evidentemente con il vincolo della stabilità, cioè con poli a parte reale negativa). Si possono realizzare, in particolare, anche funzioni del secondo ordine (risonanti), come quelle che si ottengono usualmente impiegando circuiti passivi RLC.

A tal fine si utilizza lo schema in figura, dove la rete di ingresso e quella di reazione sono appunto reti a due porte RC passive. Imponendo al solito modo l'equilibrio delle correnti nella terra virtuale nella approssimazione di guadagno infinito, si ottiene la seguente espressione per la funzione di trasferimento del circuito:



$$(49) \quad A_F(s) \approx -Y_{21S} / Y_{21F}$$

dove  $Y_{21}$  indica la transammettenza fra la porta 1 e la porta 2 delle reti. In vari testi si trovano tabelle che forniscono le transammettenze di una estesa varietà di reti RC a due porte, che possono essere usate per progettare questi circuiti,

Notiamo tuttavia che per ottenere caratteristiche filtranti di forma generale usando reti costituite esclusivamente da elementi RC vi sono altre soluzioni, usate comunemente, oltre a quella appena esaminata: circuiti con un operazionale a più cicli di reazione, circuiti impieganti più operazionali (fra cui i filtri a variabili di stato), ecc.

### 13. Analisi tenendo conto del guadagno finito dell'amplificatore

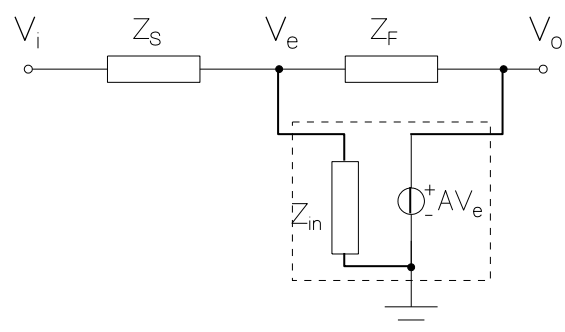
Torniamo a considerare lo schema base del circuito invertente per analizzarlo tenendo conto del guadagno finito dell'amplificatore interno, che rappresentiamo come in figura, cioè con impedenza d'ingresso  $Z_{in}$  finita, guadagno  $A$  finito, ma impedenza d'uscita nulla (quest'ultima assunzione conduce ad annullare la trasmissione diretta ingresso-uscita  $\gamma(s)$ ).

Esprimiamo il segnale d'errore nella forma di una generica combinazione lineare dei segnali d'ingresso e di uscita

$$(50) \quad V_e = \alpha V_i + \beta V_o$$

dove ora le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  sono così definite:

$$(51) \quad \alpha = V_e/V_i|_{V_o=0} \quad ; \quad \beta = V_e/V_o|_{V_i=0}$$





Sostituendo  $V_o = AV_e$  nella (50) si ottiene la seguente espressione per la funzione di trasferimento ingresso-uscita di un amplificatore a reazione di tensione in parallelo con reti bipolari d'ingresso e di reazione:

$$(52) \quad A_F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\alpha(s)A(s)}{1 - \beta(s)A(s)}$$

Si noti che, a differenza dei casi trattati in precedenza, la definizione (51) di  $\beta$  tiene conto esplicitamente del fatto che in questo schema non vi è un circuito sottrattore che inverte il segno del segnale di reazione; d'altra parte l'amplificatore è usato nella configurazione invertente e quindi il guadagno  $A$  ha segno negativo, compensando pertanto il segno negativo che appare nel denominatore della (52). In altre parole, dato che  $A(0) < 0$  ed essendo  $\beta > 0$ , si ha  $-\beta A(0) > 0$  e quindi  $D(0) > 0$ .

Per esprimere la funzione  $A_F$  in termini delle grandezze che caratterizzano il circuito ricaviamo innanzitutto le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , tenendo presente che si tratta di considerare due partitori (il primo dall'ingresso alla terra virtuale, il secondo dall'uscita alla terra virtuale):

$$(53) \quad \alpha = \frac{Y_S}{Y_S + Y_F + Y_{in}} \quad ; \quad \beta = \frac{Y_F}{Y_S + Y_F + Y_{in}}$$

Sostituendo le precedenti nella (52) si ottiene l'espressione generale

$$(54) \quad A_F = \frac{Y_S A}{Y_S + Y_{in} + Y_F (1 - A)}$$

che nella approssimazione di guadagno infinito si riduce all'espressione (42) già trovata.

Spesso la funzione di trasferimento  $A_F$  viene posta nella forma seguente

$$(55) \quad A_F \approx -\frac{Z_F}{Z_S} \left[ 1 + \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{Z_F}{Z_S} + \frac{Z_F}{Z_{in}} \right) \right]$$

che si ottiene dividendo per  $A$  il numeratore e il denominatore della (54) e utilizzando poi l'approssimazione  $1/(1+\varepsilon) \approx 1-\varepsilon$ . Tale espressione è di grande utilità pratica per valutare l'errore che si commette nella approssimazione di guadagno infinito.

Esaminando la (55) si comprende anche il diverso livello d'importanza, ai fini della precisione della risposta di un amplificatore operazionale, del guadagno  $A$  e dell'impedenza d'ingresso  $Z_{in}$  dell'amplificatore interno: un alto guadagno è essenziale, una elevata impedenza

d'ingresso è soltanto importante. Questo è un punto delicato, che a volte viene ignorato o, addirittura, discusso in modo non corretto.

**Esempio. Il guadagno è più importante dell'impedenza d'ingresso.**

Utilizziamo la (55) per valutare l'errore che si commette usando l'espressione approssimata (42). Consideriamo un caso tipico con i seguenti valori dei parametri:  $A = -10^6$ ,  $R_{in} = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_S = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_F = 100 \text{ k}\Omega$ . Si ha evidentemente  $A_F \approx -100$ . L'errore relativo si ottiene calcolando lo scarto rispetto all'unità dell'espressione fra parentesi quadre nella (55):  $-10^{-6}(1+100+0.1) \approx -10^{-4}$ . Si conclude che l'approssimazione è assai buona.

Consideriamo quindi il caso in cui la resistenza d'ingresso presenti un valore particolarmente basso, riducendo di un fattore  $10^5$  il suo valore:  $R_{in}=10 \text{ }\Omega$  (immaginando, per esempio, di aver disposto un resistore da  $10 \text{ }\Omega$  in parallelo fra i due ingressi dell'amplificatore, oppure di averne degradato l'impedenza d'ingresso con una manovra oltremodo malaccorta). In questo caso l'errore relativo assume il valore  $-10^{-6} (1+100+10^4) \approx -10^{-2}$ , che in alcuni casi è ancora accettabile. Se, invece, manteniamo la resistenza d'ingresso a un valore elevato ( $R_{in} = 1 \text{ M}\Omega$ ), ma riduciamo di un fattore  $10^3$  il guadagno, le prestazioni del circuito diventano inaccettabili. L'errore relativo, infatti, assume in questo caso il valore  $-10^{-3} (1+100+0.1) \approx -0.1$

**Esercizio.** Ripetere i calcoli dell'esempio precedente alla frequenza di 1000 Hz, nel caso in cui la funzione di trasferimento dell'amplificatore possieda un polo reale a 10 Hz.

## CENNI SUGLI OSCILLATORI

### 14. Introduzione agli oscillatori

In elettronica si chiamano oscillatori i circuiti che generano autonomamente segnali variabili nel tempo con andamento periodico. Gli oscillatori si suddividono generalmente in *oscillatori a rilassamento* e in *oscillatori lineari*. I primi generano tipicamente segnali ricchi di armoniche (onde quadre, triangolari, a denti di sega, sequenze di impulsi, ecc.) e nel loro funzionamento impiegano dispositivi che funzionano in regime decisamente nonlineare (fra gli oscillatori nonlineari rientrano, per esempio, quelli impieganti una lampadina al neon e i multivibratori astabili<sup>21</sup>). Gli oscillatori lineari, dei quali ci vogliamo occupare brevemente in quanto segue, generano invece tipicamente segnali sinusoidali con distorsione relativamente bassa, dal momento che nel loro funzionamento i dispositivi lavorano in regime approssimativamente lineare.

In generale, in un circuito insorgono oscillazioni quando una sua risposta libera che contiene almeno un termine sinusoidale esponenzialmente crescente, cioè del tipo  $\sin(\omega_0 t)\exp(\alpha t)$  con  $\alpha > 0$ , dovuto alla presenza, nella corrispondente funzione di rete, di un polo complesso con parte reale positiva. In tal caso, anche se la parte reale  $\alpha$  è molto piccola rispetto alla parte immaginaria, l'oscillazione s'innesca comunque (a causa del transitorio derivante dal collegamento del circuito all'alimentazione, a causa del rumore di fondo che è sempre presente, ecc.) e la sua ampiezza cresce gradualmente fino a raggiungere, per effetto delle nonlinearità che si manifestano riducendo corrispondentemente il guadagno, un valore di regime di ampiezza idealmente costante. Questo avviene quando il coefficiente  $\alpha$  si annulla.

Gli oscillatori lineari vengono suddivisi di solito fra *oscillatori a resistenza* (o a *conduttanza*) *negativa*, il cui funzionamento è basato sulla presenza di un dispositivo dotato di resistenza (o conduttanza) differenziale negativa oppure di un circuito realizzato in modo da presentare tale caratteristica, e *oscillatori a reazione positiva*, dove è presente appunto un ciclo di reazione positiva, che viene portato al limite dell'instabilità. Osserviamo però subito che questa

---

<sup>21</sup> La realizzazione tradizionale di un multivibratore astabile impiega due stadi amplificatori a emettitore comune con accoppiamento capacitivo incrociato, nei quali i transistori commutano periodicamente e alternativamente fra lo stato di saturazione e quello di interdizione, generando così una sorta di onda quadra. Risultati analoghi si ottengono utilizzando due porte logiche NOT ad accoppiamento capacitivo incrociato.

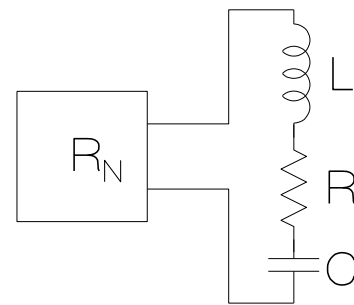
classificazione, sebbene utile sia ai fini interpretativi che a quelli realizzativi, non regge a una analisi più attenta: a) in qualsiasi circuito a reazione positiva portato all'instabilità si ha almeno una porta con impedenza avente parte reale negativa, b) qualsiasi fenomeno di resistenza negativa può essere ricondotto all'azione di un ciclo di reazione positiva portato all'instabilità.

### 15. Oscillatori a resistenza negativa

Consideriamo il modello mostrato nella figura, dove una rete attiva, opportunamente polarizzata, manifesta a una sua porta una impedenza con parte reale negativa  $R_N$  (con  $R_N < 0$ ) e parte immaginaria  $X$ . A questa porta si collega un bipolo passivo selettivo in frequenza, che nella figura è costituito da un circuito accordato RLC serie. Il circuito oscilla alla frequenza angolare  $\omega_0$  quando sono verificate le due condizioni:

$$(56) \quad j\omega_0 L + 1/j\omega_0 C + jX(\omega_0) = 0$$

$$R(\omega_0) + R_N(\omega_0) = 0$$

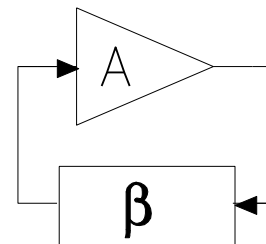


dove la resistenza equivalente serie  $R(\omega_0)$  del circuito RLC ne rappresenta tutte le dissipazioni a  $\omega_0$ . Naturalmente, perché si abbia l'innesco dell'oscillazione dovrà aversi inizialmente  $R + R_N < 0$ .

### 16. Oscillatori a reazione positiva

Il modello che si considera per discutere gli oscillatori a reazione positiva è rappresentato a destra. Si tratta di un sistema reazionato che oscilla alla frequenza angolare  $\omega_0$  quando è verificata la condizione seguente, detta *criterio di Barkhausen*:

$$(57) \quad A(j\omega_0) \beta(j\omega_0) = 1$$



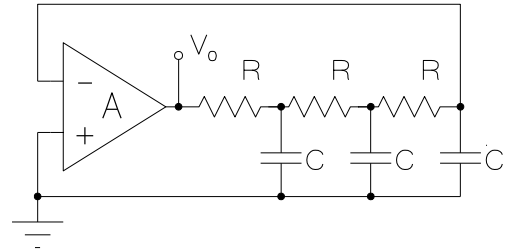
sicché il circuito si trova in reazione positiva e con fattore di reazione nullo alla frequenza angolare  $\omega_0$  (cioè  $D(\omega_0) = 0$ ). Naturalmente, perché si abbia l'innesco dell'oscillazione dovrà aversi inizialmente  $A\beta > 1$ .

E' importante osservare che l'espressione precedente esprime in realtà due condizioni scalari alla frequenza angolare  $\omega_0$ . La prima è che il guadagno complessivo lungo il ciclo di reazione abbia

valore esattamente unitario, la seconda è che lo sfasamento lungo il ciclo di reazione abbia valore nullo o pari a un multiplo intero di  $2\pi$ <sup>22</sup>.

Esiste una estesa varietà di oscillatori a reazione positiva<sup>23</sup>, realizzati utilizzando nella rete di reazione dei circuiti RC oppure LC (come nei classici oscillatori di Colpitts e di Hartley), o anche linee di ritardo, cristalli di quarzo, ...

Un classico esempio di oscillatore a reazione positiva è costituito dall'oscillatore a sfasamento RC mostrato a fianco. Il guadagno  $A$  dell'amplificatore, che supponiamo per semplicità indipendente dalla frequenza, compensa l'attenuazione della rete RC alla frequenza di oscillazione in modo che sia verificata la



condizione di oscillazione per quanto riguarda il guadagno. A questa frequenza la rete RC deve introdurre uno sfasamento di  $-\pi$  in modo che sia verificata anche la condizione di oscillazione relativa alla fase dato che il guadagno ha segno negativo e quindi lo sfasamento totale è nullo.

Analizzando la rete RC a tre celle si ricava la seguente espressione per la sua funzione di trasferimento

$$(58) \quad \beta(s) = \frac{1}{1 + 6\tau s + 5\tau^2 s^2 + \tau^3 s^3}$$

che coincide con quella della rete di reazione dell'oscillatore se l'impedenza d'uscita dell'amplificatore è trascurabile rispetto all'impedenza d'ingresso della rete e se l'impedenza d'uscita della rete è trascurabile rispetto all'impedenza d'ingresso dell'amplificatore.

La frequenza di oscillazione si determina imponendo che  $\beta(s)$  sia reale e abbia segno negativo, cioè annullandone la parte immaginaria e scegliendo la radice positiva non nulla

$$\omega_0 = \sqrt{6} / \tau$$

A questa frequenza si ha  $\beta = 1/(1-5\tau^2\omega_0^2) = -1/29$ , da cui si ricava il guadagno che deve avere l'amplificatore:  $A = -29$ . In pratica si sceglierà un valore leggermente maggiore (5÷10% in eccesso)

<sup>22</sup> Per comprendere il significato di queste due condizioni si può immaginare di interrompere il collegamento fra la rete di reazione e l'ingresso dell'amplificatore, applicando a quest'ultimo il segnale  $v(t) = V\sin(\omega_0 t)$ . Soltanto se le due condizioni anzidette sono entrambe verificate all'uscita della rete di reazione si avrà un segnale identico a  $v(t)$ . In tal caso, rimuovendo il segnale esterno e chiudendo l'anello di reazione, il circuito si manterrà in oscillazione.

<sup>23</sup> J. Millman, A. Grabel *Microelectronics* McGraw-Hill, 1988, capitolo 15

allo scopo di garantire l'innescò delle oscillazioni (e di tener conto delle tolleranze dei componenti della rete RC). Al crescere dell'ampiezza delle oscillazioni si raggiungerà poi una condizione di equilibrio determinata dalle nonlinearità dell'amplificatore, il cui comportamento tende gradualmente a quello di un limitatore; più precisamente, questa condizione si raggiunge per quel valore di ampiezza a cui corrisponde guadagno unitario per la funzione descrittiva dell'anello di reazione.

Per ottenere una buona stabilità d'ampiezza, migliore di quella ottenibile sfruttando la riduzione di guadagno che accompagna il manifestarsi delle nonlinearità del circuito, si possono usare vari accorgimenti: rettificare il segnale d'uscita per ricavarne un segnale in continua che modifichi lo stato di polarizzazione dell'amplificatore riducendone il guadagno, inserire nel circuito elementi che presentino resistenza variabile in funzione dell'ampiezza del segnale (diodi, termistori, lampadine<sup>24</sup>) disposti in modo da ridurre il guadagno dell'amplificatore, ecc.

Spesso però, più della stabilità d'ampiezza, ha importanza la stabilità di frequenza delle oscillazioni. Questa si determina calcolando la derivata della frequenza di oscillazione rispetto alla fase (che costituisce una misura della variazione di frequenza che verrebbe causata dalla presenza di uno sfasamento addizionale lungo l'anello di reazione, provocato da variazioni di temperatura o da qualsiasi altra causa). Per quanto riguarda l'oscillatore RC a sfasamento questa grandezza vale  $12\sqrt{6}/29=1.01\dots$ . Valori più bassi di questa derivata, corrispondenti a maggior stabilità di frequenza, si ottengono usando nella rete di reazione circuiti LC, anzichè RC, con valori tanto minori quanto più elevato è il fattore di merito Q di questi circuiti. Ottima stabilità di frequenza offrono, in particolare, gli oscillatori a quarzo, dove la risonanza è affidata a un oscillatore meccanico che presenta piccolissimo smorzamento e quindi altissimi valori ( $10^3$ - $10^5$ ) del fattore di merito (pag. 23, parte III).

---

<sup>24</sup> Una lampadinetta a incandescenza fu usata a questo scopo nell'oscillatore RC costruito da William Hewlett e David Packard (sviluppando il lavoro di tesi svolto all'università di Stanford), che fu utilizzato per la colonna sonora del film Fantasia di Walt Disney e poi costituì il primo prodotto commerciale della società Hewlett-Packard (attualmente denominata Agilent).