PARTE IV

IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Per facilitare la risoluzione delle equazioni differenziali dei circuiti e dei sistemi lineari e stazionari, riconducendole a equazioni algebriche mediante opportune trasformazioni, sono stati introdotti vari metodi, chiamati spesso *metodi operazionali*.

Utilizzando questi metodi il segnale d'ingresso viene decomposto esprimendolo come somma o integrale di determinate funzioni base, le equazioni (trasformate in algebriche) vengono risolte per queste funzioni e la soluzione ottenuta viene poi ricondotta (mediante antitrasformazione) a rappresentare il segnale d'uscita nel dominio del tempo.

I vari metodi differiscono per i tipi di funzioni base impiegate, e quindi dei segnali ai quali essi possono venire applicati:

- sinusoidi pure di frequenza data — metodo simbolico
- sinusoidi con frequenze multiple di una data — serie di Fourier
- esponenziali complessi — trasformata di Fourier
- esponenziali complessi (nulli per t<0) — trasformata di Laplace

1. La trasformata di Fourier

Uno dei metodi operazionali più importanti è il metodo della **trasformata di Fourier**, che è basato sui due seguenti integrali:

(1) $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t)\, dt$$

(2) $$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$$

Il primo, chiamato integrale di Fourier o trasformata diretta di Fourier, rappresenta la trasformazione nel dominio della frequenza della funzione f(t) definita nel dominio del tempo. Il secondo integrale esprime invece la trasformazione inversa, cioè il passaggio dalla rappresentazione nel dominio della frequenza a quello del tempo. Entrambi sono operatori lineari.

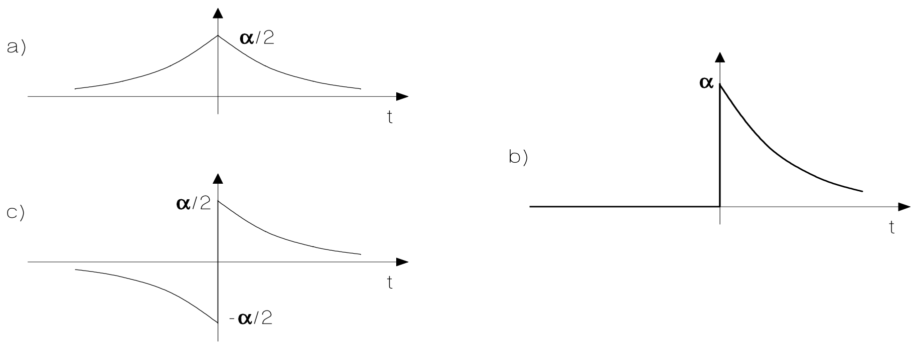
E' importante osservare che non tutte le funzioni del tempo sono trasformabili secondo Fourier: l'esistenza dell'integrale diretto è garantita infatti soltanto per le funzioni sommabili[1], per cui si ha

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt < \infty$$

Questa condizione non è verificata per molte funzioni di notevole interesse, fra cui tutte le funzioni periodiche, mentre lo è certamente per le funzioni limitate dotate di supporto temporale limitato (identicamente nulle al di fuori di un dato intervallo di tempo), che rappresentano segnali transitori.

La proprietà essenziale della trasformata di Fourier, che la rende particolarmente appropriata allo studio dei circuiti dinamici è la seguente: la trasformata della derivata temporale di una funzione del tempo è data dal prodotto di $j\omega$ per la trasformata della funzione considerata, la trasformata dell'integrale di una funzione è data dal rapporto fra la trasformata della funzione e $j\omega$. Applicando la trasformazione di Fourier a una equazione integrodifferenziale, questa si riduce pertanto a una equazione algebrica nelle trasformate di Fourier dei segnali.

Alcuni segnali esponenziali



Consideriamo il segnale rappresentato nella parte a) della figura

(4) $$f(t) = \tfrac{1}{2}\, \alpha \exp(-\alpha|t|)$$

che verifica la condizione (3), dato che ha area finita (in particolare unitaria). Utilizzando la (1) si ottiene la corrispondente trasformata

(4a) $$F(\omega) = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{0} \exp(-j\omega t + \alpha t)\, dt + \frac{\alpha}{2}\int_{0}^{\infty} \exp(-j\omega t - \alpha t)\, dt = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

che è una funzione reale della variabile ω. Ricordiamo che questa è una proprietà generale delle trasformate di Fourier di funzioni pari del tempo.

[1] Un approccio più esteso alla trasformata di Fourier si trova in A. Papoulis *The Fourier Integral* McGraw-Hill, 1962

La trasformata dell'esponenziale troncato f(t) = u(t) exp(-α|t|) (parte b) della figura a pagina precedente) si ottiene immediatamente dal secondo degli integrali calcolati sopra: F(ω) = α/(α+jω). Questa volta la trasformata di Fourier è una funzione complessa di ω (reale di jω), che è il caso più frequente in pratica.

Consideriamo ora la funzione mostrata nella parte c) della figura:

(5) f(t) = ½ u(-t) exp(αt) + ½ u(t) exp(-αt)

Anche la sua trasformata si ottiene immediatamente utilizzando i calcoli svolti prima:

(5a) $$F(\omega)=\frac{j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

F(ω) è una funzione immaginaria della variabile ω. Ricordiamo che questa è una proprietà generale delle trasformate di Fourier delle funzioni dispari del tempo.

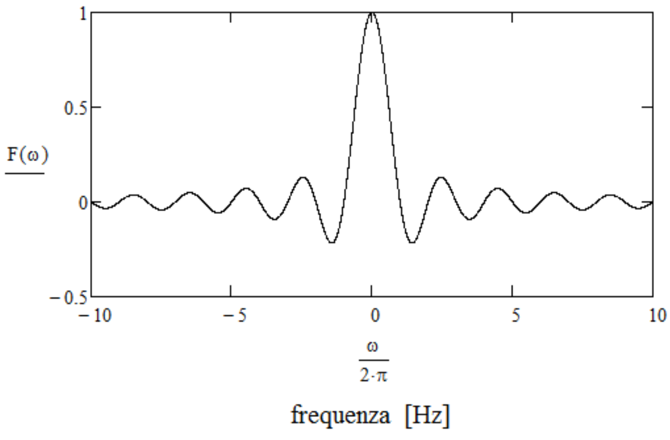
Consideriamo poi un impulso rettangolare di durata T centrato all’origine:

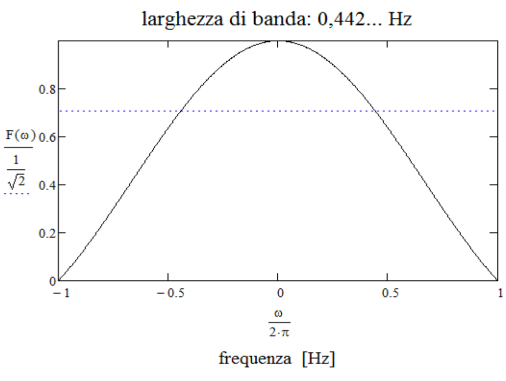
(6) f(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2)

La trasformata di questo segnale è:

(6a) $$F(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}\exp(-j\omega t)\,dt=T\,\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Lo spettro (per T = 1 s) è rappresentato nella figura a destra. Dal dettaglio qui sotto si ricava che la banda (unilatera) è: 0,44/T Hz.





E’ utile infine ricordare il seguente importante teorema, detto di Parseval, per cui:

(7) $$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

LA TRASFORMATA DI LAPLACE

2. Introduzione alla trasformata di Laplace

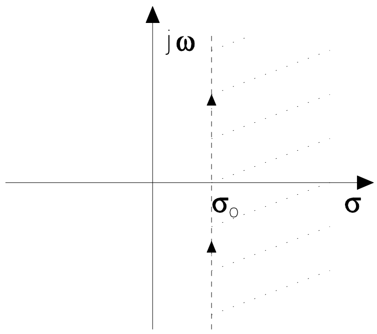
Il metodo operazionale più usato in elettronica è quello della trasformata di Laplace, del quale ci occupiamo brevemente in quanto segue, rimandando ai testi di Analisi Matematica per una discussione più rigorosa e approfondita. Nella trasformata di Laplace la convergenza dell'integrale diretto viene assicurata anche per molte funzioni che non verificano la condizione (3), modificando l'integrale di Fourier con l'introduzione di un opportuno fattore (detto di convergenza) $\exp(-\sigma t)$ e prendendo come estremo inferiore d'integrazione l'origine anziché $-\infty$. Così facendo, la variabile complessa

$$s = \sigma + j\omega$$

viene a sostituire la variabile $j\omega$, e l'integrale diretto e quello inverso si esprimono nella forma:

(8) $$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)\,dt$$

(9) $$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\exp(st)\,ds$$



Nell'integrale (9) si considera $\sigma > \sigma_o$, dove σ_o (ascissa di convergenza) è il minimo valore σ che assicura la convergenza dell'integrale diretto, e l'integrazione ha luogo come indicato nella figura.

La trasformata di Laplace di una funzione del tempo è una funzione analitica reale della variabile complessa s nel dominio di definizione $Re[s] > \sigma_o$, che può essere estesa a tutto il piano s eccettuati i punti di singolarità. Per esempio dalla funzione e^t si ricava $F(s) = 1/(s-1)$, $Re[s] > 1$, che è analitica dovunque salvo che per $s = 1$.

Si considerano generalmente le trasformate di funzioni che rappresentano segnali applicati a partire da $t = 0$ in poi, dato che l'integrale di Laplace (8) ha l'estremo inferiore d'integrazione all'origine. Notiamo che la trasformata di Fourier di queste funzioni, qualora esse soddisfino la condizione (3), coincide con la trasformata di Laplace per $s = j\omega$.

Per quanto sopra, la trasformata di Laplace di una funzione f(t) non dipende dai valori che tale funzione assume per $t < 0$. Questo non crea inconvenienti quando si utilizza la trasformata di Laplace per determinare la risposta di un circuito o di un sistema lineare e stazionario da $t = 0$ in poi.

Notiamo infine che non sono trasformabili le funzioni per cui non esiste alcun valore al finito dell'ascissa di convergenza σ_o che garantisca la convergenza dell'integrale diretto: un esempio è costituito dalle funzioni del tipo $\exp(t^{\rho})$ con $\rho > 1$. Sono però trasformabili quasi tutte le funzioni di interesse pratico nello studio dei circuiti e dei sistemi.

3. I teoremi fondamentali

Fra i teoremi più importanti ricordiamo i seguenti, dove assumiamo che le funzioni del tempo f(t) siano trasformabili con trasformata F(s) e indichiamo la corrispondenza tra una funzione e la sua trasformata con la notazione: $f(t) \leftrightarrow F(s)$.

1) **Linearità**. Se $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$ e $f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$, allora si ha

(10) $$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \leftrightarrow \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

per qualsiasi valore di α e di β.

Si tratta di una conseguenza immediata della linearità dell'integrale di Laplace.

2) **Derivazione rispetto al tempo.**

(11) $$L[df/dt] = sF(s) - f(0^+)$$

Si dimostra integrando per parti l'espressione L[df/dt].

3) **Integrazione rispetto al tempo.**

(12) $$L\left[\int_0^t f(t')\,dt'\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Si dimostra applicando il teorema 2 all'integrale della funzione f(t).

4) **Valore iniziale.**

(13) $$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

5) **Valore finale.**

(14) $$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

6) **Traslazione nel dominio del tempo.**

(15) $L[f(t-T)] = e^{-sT} F(s)$; $T > 0$

7) **Cambiamento di scala.**

(16) $L[f(t/T)] = T\ F(Ts)$

8) **Traslazione nel campo complesso.**

(17) $L[\exp(\gamma t)\ f(t)] = F(s-\gamma)$

9) **Convoluzione.** Riguarda la convoluzione di due funzioni del tempo fra 0 e t:

(18) $$L\left[\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$$

I primi tre teoremi sono quelli che permettono di trasformare in algebrica un'equazione integrodifferenziale. I teoremi del valore iniziale e del valore finale sono utili per una valutazione immediata dei valori[2] di una funzione f(t) a t = 0 e a t = ∞, quando se ne conosca la trasformata F(s), senza che sia necessario antitrasformarla. Gli altri teoremi sono utili invece sopratutto nel calcolo di trasformate di funzioni del tempo e di antitrasformate di funzioni della variabile s. L'ultimo teorema, infine, trova impiego nel calcolo della risposta di un sistema, quando una delle due funzioni del tempo ne rappresenta la risposta impulsiva, l'altra l'eccitazione.

---

[2] Attenzione: si ottengono così i *valori* asintotici, ma non certamente gli *andamenti* asintotici, della funzione.

4. Trasformate di funzioni impulsive ed esponenziali

La trasformata della funzione impulsiva unitaria si ottiene immediatamente dalla definizione dell'integrale di Laplace:

(19) $$\delta(t) \leftrightarrow \int_0^\infty \delta(t)\exp(-st)dt = \left[\exp(-st)\right]_{t=0} = 1$$

Da questo risultato, usando il teorema d'integrazione (12), si ricavano le trasformate delle funzioni che costituiscono gli integrali successivi della funzione delta, cioè il gradino unitario, la rampa, la parabola, ecc.

(20)	gradino	u(t)	$\leftrightarrow$	1/s
(21)	rampa	r(t) = tu(t)	$\leftrightarrow$	$1/s^2$
(22)	parabola	p(t) = t^2u(t)	$\leftrightarrow$	$2/s^3$
(23)	in generale	t^nu(t)	$\leftrightarrow$	$n!/s^{n+1}$

Con questi risultati, usando anche il teorema di traslazione nel dominio del tempo (15), si ottengono le trasformate di molti segnali usati in elettronica. Nel caso, per esempio, di un impulso rettangolare di durata T si ha:

(20a) $u(t) - u(t-T) \leftrightarrow (1-e^{-sT})/s$

La trasformata della funzione esponenziale exp(γt) si ottiene applicando il teorema di traslazione nel campo complesso (17), oppure direttamente dall'integrale di Laplace

(24) $$\exp(\gamma t) \leftrightarrow \int_0^\infty \exp\left[(\gamma - s)t\right]dt = \frac{1}{\gamma - s}\int_0^\infty \exp\left[(\gamma - s)t\right]d(\gamma - s)t = \frac{1}{s-\gamma}$$

con ascissa di convergenza Re[γ]. Da questo risultato si ricavano le trasformate relative ai seguenti importanti casi particolari.

a) Se $\gamma = 0$ si ha il risultato già trovato prima: u(t) $\leftrightarrow$ 1/s

b) Se $\gamma = -\alpha$ (con α reale e positivo) si ha

(25) $$u(t)\exp(-\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

c) Se γ = jβ (γ immaginario, β reale) si ha

(26) $$u(t)\exp(j\beta t) \leftrightarrow \frac{1}{s-j\beta}$$

da cui si ricavano le trasformate delle funzioni

(27) $$u(t)\sin(\beta t) = \frac{\exp(j\beta t)-\exp(-j\beta t)}{2j} \leftrightarrow \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

(28) $$u(t)\cos(\beta t) = \frac{\exp(j\beta t)+\exp(-j\beta t)}{2} \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

d) Se $\gamma = -\alpha + j\beta$ si ha $u(t)\ \exp(-\alpha t + j\beta t) \leftrightarrow 1/(s+\alpha-j\beta)$, da cui si ricavano le ulteriori espressioni

(29) $$u(t)\exp(-\alpha t)\sin(\beta t) = u(t)\exp(-\alpha t)\frac{\exp(j\beta t)-\exp(-j\beta t)}{2j} \leftrightarrow \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

(29a) $$u(t)\exp(-\alpha t)\cos(\beta t) = u(t)\exp(-\alpha t)\frac{\exp(j\beta t)+\exp(-j\beta t)}{2} \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

5. Impiego della trasformata di Laplace nei circuiti

La trasformazione delle equazioni dei circuiti e dei sistemi si esegue direttamente utilizzando, come si è già accennato, i teoremi di linearità, di derivazione e d'integrazione. Considerando per semplicità il caso di circuiti a un solo ingresso e a una sola uscita, si ottiene così un'equazione algebrica nelle variabili trasformate, che si risolve esprimendo la grandezza incognita, cioè la trasformata dell'uscita, in termini dei parametri del circuito e della grandezza nota, cioè la trasformata dell'ingresso.

Nell'espressione della trasformata della grandezza incognita figureranno, generalmente, i valori iniziali che derivano dall'applicazione del teorema di derivazione. La trasformata dell'uscita si può pertanto esprimere in generale come somma di due termini: il primo relativo all'azione della sola grandezza d'ingresso, che rappresenta dunque la trasformata della *risposta forzata*, il secondo relativo all'azione delle sole condizioni iniziali, che rappresenta la trasformata della *risposta libera*.

L'espressione della risposta nel dominio del tempo si ottiene infine antitrasformando la funzione d'uscita espressa nel dominio di s. Dei metodi di antitrasformazione ci occuperemo in seguito, ma notiamo subito che spesso questa operazione si può eseguire immediatamente utilizzando le coppie trasformata-antitrasformata delle funzioni più comuni che sono state ricavate in quanto precede, ricorrendo eventualmente all'impiego di teoremi appropriati.

Il rapporto fra la trasformata della risposta forzata e quella dell'eccitazione presenta particolare interesse in quanto costituisce l'espressione di una immettenza o di una funzione di trasferimento nel dominio di s. In particolare, il rapporto fra le trasformate della tensione (sempre al netto delle condizioni iniziali) e della corrente a una porta di una rete, rappresenta l'impedenza Z(s) della porta espressa nel dominio di s; il rapporto fra le trasformate della tensione a una porta (forzata, cioè al netto delle condizioni iniziali) e della tensione applicata a un'altra porta di una rete, rappresenta la funzione di trasferimento H(s) fra le due porte.

Chiamando X(s) la trasformata della grandezza d'ingresso e Y(s) la trasformata della grandezza d'uscita (e occupandoci qui soltanto della risposta forzata), si ha in generale:

(30) $$Y(s) = F(s)X(s)$$

Si conclude che la risposta forzata nel dominio di s è sempre espressa dal prodotto fra la trasformata del segnale d'ingresso e una funzione che esprime le proprietà del circuito considerato. A seconda dei casi - tensioni relative a due porte di un circuito, correnti e tensioni relative a una stessa porta o a due porte diverse - avremo dunque:

(30a) $$V_2(s) = H(s)V_1(s) \quad ; \quad I(s) = Y(s)V(s) \quad ; \quad V(s) = Z(s)I(s)$$

Per chiarire quanto detto applichiamo la trasformazione di Laplace a un circuito RC passabasso, occupandoci della relazione fra la tensione d'ingresso $v_1(t)$ e la tensione d'uscita $v_2(t)$. Chiamando τ il prodotto RC, si ha l'equazione differenziale:

(31) $$v_1(t) = \tau\, dv_2/dt + v_2(t)$$

Applicando la trasformazione di Laplace alla (31) si ottiene la seguente equazione algebrica nelle grandezze trasformate

(32) $$V_1(s) = \tau s V_2(s) - \tau v_2(0^+) + V_2(s)$$

che risolviamo ricavando la trasformata della tensione d'uscita:

(33) $$V_2(s) = \frac{V_1(s)}{1+\tau s} + \frac{\tau v_2(0^+)}{1+\tau s}$$

dove il primo termine a destra rappresenta la risposta forzata del circuito $V_{2f}(s)$, dovuta all'effetto della tensione d'ingresso, mentre il secondo rappresenta invece la risposta libera $V_{2l}(s)$, determinata dallo stato iniziale.

L'antitrasformazione del termine relativo alla risposta libera è immediata: utilizzando la (25) si ha infatti, $v_{2l}(t) = v_2(0^+)\ u(t)e^{-t/\tau}$. Il termine relativo alla risposta forzata è dato dal prodotto fra la trasformata della funzione d'ingresso e una funzione che rappresenta le proprietà del circuito considerato: in questo caso la funzione di trasferimento del circuito dalla porta d'ingresso a quella d'uscita espressa nel dominio della variabile s. Si ha dunque

(34) $$H(s) = \frac{V_{2f}(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1+\tau s}$$

Se l'ingresso è un impulso unitario, l'uscita è la risposta impulsiva del circuito:

(35) $$v_1(t) = \delta(t) \qquad ; \qquad v_2(t) = h(t)$$

Le corrispondenti grandezze trasformate, dato che la funzione delta ha trasformata unitaria (19) e che $V_2(s) = V_1(s)H(s)$, sono pertanto

(36) $$V_1(s) = 1 \qquad ; \qquad V_2(s) = H(s)$$

Si conclude che la funzione di trasferimento coincide in generale con la trasformata della risposta impulsiva e, inoltre, che nel caso di eccitazione impulsiva unitaria la trasformata dell'uscita coincide con la funzione di trasferimento.

La risposta impulsiva nel dominio del tempo si ricava antitrasformando la funzione di trasferimento, che in questo caso è data dalla (34). Utilizzando la (25), con $\alpha = -1/\tau$, si ha:

(37) $$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{1+\tau s}\right] = u(t)\frac{\exp(-t/\tau)}{\tau}$$

Se l'ingresso è un gradino unitario, l'uscita è la risposta indiciale del circuito:

(38) $v_1(t) = u(t) \quad ; \quad v_2(t) = h_u(t)$

Le corrispondenti grandezze trasformate, dato che la funzione gradino unitario ha trasformata 1/s per la (20) e che $V_2(s)=V_1(s)H(s)$, sono pertanto

(39) $V_1(s) = 1/s \quad ; \quad V_2(s) = H_u(s) = H(s)/s$

Si conclude che in generale che la funzione H(s)/s coincide con la trasformata della risposta indiciale e, inoltre, che nel caso di eccitazione a gradino unitario la trasformata dell'uscita coincide con H(s)/s.

Il calcolo della risposta indiciale si esegue antitrasformando la funzione $H_u(s) = H(s)/s$, che nel nostro caso non è esprimibile direttamente in termini delle funzioni considerate in precedenza. Ad esse però può essere ricondotta mediante sviluppo in frazioni parziali. Utilizzando la (34) e ponendo

(40) $$\frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(1+\tau s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+\tau s}$$

si ricava: A = 1, B = -τ. Ricordando la (25) si ha allora:

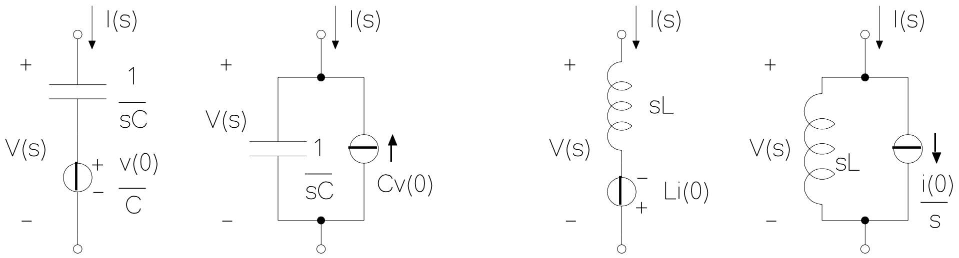
(41) $$h_u(t) = L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{\tau}{1+\tau s}\right] = u(t)\left(1-\exp(-t/\tau)\right)$$

Ma di solito, nell'analisi di un circuito con la trasformata di Laplace, anziché scriverne le equazioni nel dominio del tempo per poi trasformarle, si scrivono direttamente le equazioni in forma trasformata, come si fa d'altronde usando il metodo simbolico. E allora occorre disporre delle equazioni costitutive degli elementi di circuito espresse nel dominio di s.

Nel caso di un condensatore le relazioni costitutive in s assumono le forme seguenti, corrispondenti ai circuiti equivalenti mostrati nella figura a pagina seguente

(42) $$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' \leftrightarrow V(s) = \frac{v(0)}{s} + \frac{I(s)}{sC}$$

(43) $i(t) = C dv/dt \leftrightarrow I(s) = sCV(s) - Cv(0)$



dove le condizioni iniziali sono rappresentate, nei due casi, nella forma di un gradino di tensione di ampiezza v(0) e di un impulso di corrente di intensità Cv(0) (corrispondente alla carica Q(0) = Cv(0)).

Analogamente, per un induttore L si ha

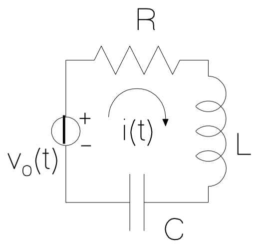
(44) $$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt' \leftrightarrow I(s) = \frac{i(0)}{s} + \frac{V(s)}{sL}$$

(45) $v(t) = L di/dt \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0)$

dove le condizioni iniziali sono rappresentate, nei due casi, nella forma di un gradino di corrente di ampiezza i(0) e di un impulso di tensione Li(0) (corrispondente al flusso $\phi(0) = Li(0)$).

Così procedendo, possiamo scrivere direttamente l'equazione trasformata del circuito RLC mostrato in figura nella forma

(46) $V_o(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0) + I(s)/sC + v_C(0)/s$



che riscriviamo più compattamente come segue

(47) $V(s) = Z(s)I(s)$

dove Z(s) è l'impedenza del circuito nel dominio di s e V(s) è l'eccitazione generalizzata:

(48) $Z(s) = R + sL + 1/sC$

(49) $V(s) = V_o(s) + Li(0) - v_C(0)/s$

Procedendo allo stesso modo le equazioni delle maglie e dei nodi di un circuito si scriveranno nelle forme seguenti:

(50) $V_k(s) = \Sigma_h Z_{kh}(s)I_h(s)$

(51) $I_k(s) = \Sigma_h Y_{kh}(s)V_h(s)$

6. **Poli e zeri delle funzioni di s**

Le funzioni di s di nostro interesse, che rappresentano impedenze, funzioni di trasferimento e segnali, sono generalmente funzioni razionali fratte della variabile complessa. Tali sono infatti, come abbiamo visto, le trasformate di molti segnali usati comunemente. Tali sono anche le funzioni relative ai circuiti a costanti concentrate, in quanto ottenute mediante trasformazione di equazioni integrodifferenziali. E tali sono allora, per quanto si è detto prima (30), anche le funzioni di s che rappresentano segnali d'uscita.

Rappresentiamo una generica funzione razionale fratta della variabile complessa s nella forma seguente:

(52)
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

dove il numeratore è un polinomiale di grado m in s, il denominatore di grado n. Le m radici del numeratore prendono il nome di *zeri* e si indicano con z, le n radici del denominatore il nome di *poli* e si indicano con p. Se i coefficienti a_i e b_j sono tutti reali[3], allora i poli e gli zeri sono o reali oppure complessi coniugati. Fattorizzando i polinomiali N(s) e D(s), la funzione si scrive nella forma seguente:

(53)
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m}{a_n} \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ ...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

Si conclude che una funzione razionale fratta è completamente determinata quando se ne conoscono gli zeri e i poli, che come vedremo ne determinano le proprietà essenziali (e quindi la forma dell'andamento temporale della corrispondente funzione antitrasformata), e la costante b_m/a_n.

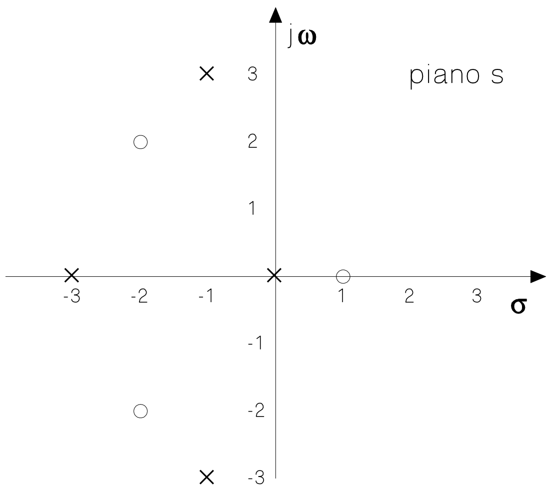
Il grafico che rappresenta le posizioni dei poli e degli zeri di una funzione nel piano complesso s = σ + jω ne evidenzia dunque le proprietà essenziali. Nella figura a pagina seguente è mostrato come esempio il grafico poli-zeri della funzione

F(s) = (s - 1)(s -2j + 2)(s + 2j + 2)/s(s + 3)(s - 3j + 1)(s + 3j + 1)

[3] Questo è quanto si verifica nello studio dei circuiti elettrici: i coefficienti a_i e b_j sono tutti reali perchè tali sono i coefficienti delle equazioni differenziali, nelle cui espressioni figurano i parametri dei circuiti (R, L, C, ecc.).

dove i poli sono rappresentati con il segno ×, gli zeri con il segno ○. Questa funzione ha uno zero reale e due complessi coniugati; due poli reali (uno dei quali nell'origine) e due complessi coniugati.

Quesito. Cosa indica il fatto che nessun polo della funzione ha parte reale positiva?



METODI DI ANTITRASFORMAZIONE

Dal momento che l'impiego diretto della formula (9) per l'antitrasformazione è generalmente tutt'altro che agevole, i metodi di antitrasformazione più usati in pratica sono i seguenti:

a) uso di tabelle[4] con eventuale impiego di appropriati teoremi;
b) metodo dei residui;
c) sviluppo in frazioni parziali;
d) metodi numerici;
e) uso del calcolatore (oggi soprattutto utilizzando programmi simbolici).

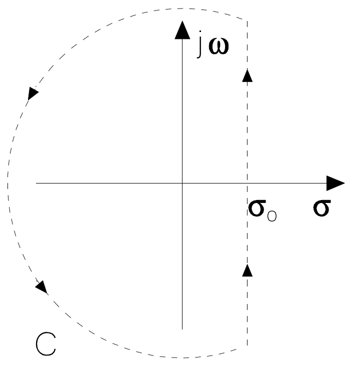
7. Il metodo dei residui

La formula (9) non è del tutto inutile. Da essa deriva infatti un metodo di antitrasformazione (*metodo dei residui*) per le funzioni razionali fratte di s. E qui ricordiamo che le funzioni impedenza, ammettenza e di trasferimento dei circuiti a costanti concentrate sono appunto funzioni razionali fratte di s, mentre non è detto che tali siano anche le trasformate di Laplace dei segnali d'ingresso (i quali, nell'espressione dei segnali d'uscita che occorre antitrasformare, vanno a moltiplicare le funzioni caratteristiche dei circuiti).

[4] Le coppie trasformata-antitrasformata riportate in quanto precede già costituiscono una tabella sufficiente a trattare molti casi. Tabelle molto più estese sono raccolte in vari testi. Fra questi citiamo i seguenti:
J. G. Holbrook *Laplace Transforms for Electronic Engineers* Pergamon Press, Londra, 1959
F. E. Nixon *Handbook of Laplace Transformation* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1960

Torniamo ora a considerare una funzione razionale fratta di s con coefficienti reali costanti, con m zeri ed n poli

(54) $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$



Se m < n la F(s) assume evidentemente valore nullo all'infinito. In tal caso il cammino d'integrazione per il calcolo della f(t) mediante la (9) può essere chiuso all'infinito (dove F(s) = 0), come mostrato nella figura, trasformando così la (9) nella

(55) $$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(s)\exp(st)\,ds$$

Dal momento che il cammino chiuso C racchiude tutti i poli della funzione integranda, l'integrale può essere espresso, per $t \geq 0$, in termini della sommatoria

(56) $f(t) = \Sigma_i R_i$ $\qquad i = 1, 2, .., n$

dove i residui R_i, se la funzione F(s) non possiede poli multipli, si calcolano con la formula

(57) $R_i = [(s-p_i)F(s)\exp(st)]_{s=p_i}$

Si può dunque esprimere la funzione antitrasformata nella forma

(58) $f(t) = u(t)\ \Sigma_i\ U_i \exp(p_i t)$ $\qquad i = 1, 2, .., n$

con i coefficienti (reali o complessi coniugati) dati dalla formula

(59) $U_i = [(s-p_i)F(s)]_{s=p_i}$

Si conclude in generale che l'antitrasformata f(t) di una funzione razionale fratta F(s), che sia una frazione propria e abbia tutti i poli distinti, è una sommatoria di prodotti fra un coefficiente indipendente dal tempo e un fattore $\exp(p_i t)$ dipendente dal tempo. Quindi con andamento temporale determinato dai poli della funzione.

Se la funzione F(s) possiede poli multipli, l'espressione dei residui corrispondenti ha una forma diversa dalla (57), contenendo anche prodotti di potenze di t per gli esponenziali. Ma anche in questo caso l'andamento asintotico della funzione antitrasformata f(t) per t che tende all'infinito dipende soltanto dagli esponenziali $\exp(p_i t)$.

Se poi la funzione F(s) non è una frazione propria, cioè il numero dei suoi zeri non è minore di quello dei poli, essa può essere ricondotta al caso precedente mediante divisione fra il polinomiale a numeratore e quello a denominatore. Consideriamo, per esempio, il caso in cui sia n = m. Se la funzione è espressa dalla (54), eseguendo la divisione fra N(s) e D(s) avremo:

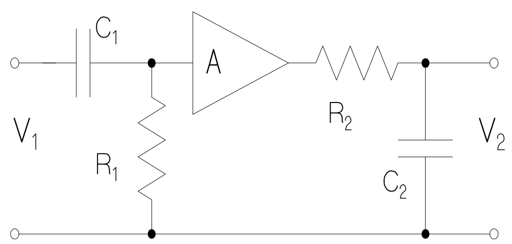
(60)
$$F(s)=\frac{b_m}{a_n}+G(s)\leftrightarrow f(t)=\frac{b_m}{a_n}\delta(t)+L^{-1}\left[G(s)\right]$$

dove G(s) è evidentemente una frazione propria e, ricordando la (19), l'antitrasformata del termine costante è una funzione delta.

Di particolare importanza è l'andamento asintotico di una funzione antitrasformata per t che tende all'infinito. La (58), in particolare, mostra che la funzione f(t) converge a zero soltanto se tutti i poli della F(s) possiedono parte reale negativa. Questo ha importanti conseguenze ai fini della stabilità di un circuito, in relazione a quanto detto a pag. 39 della Parte I, quando la F(s) è una funzione di trasferimento e la corrispondente antitrasformata è allora una risposta impulsiva: *un circuito è stabile (nel senso b.i.b.o.) soltanto se la sua funzione di trasferimento non possiede alcun polo con parte reale nulla o positiva*.

Esempio. Un amplificatore con taglio alle basse e alle alte frequenze.

Consideriamo il circuito mostrato nella figura, comprendente una cella CR passaalto, e una RC passabasso, che sono disaccoppiate mediante un amplificatore ideale di guadagno A (per ideale intendiamo qui un amplificatore dotato di guadagno reale indipendente dalla frequenza, impedenza d'ingresso infinita e impedenza d'uscita nulla). Questo circuito rappresenta un modello approssimato per molti amplificatori che presentano un taglio sia alle basse che alle alte frequenze.



Dato che le due celle sono disaccoppiate, la funzione di trasferimento del circuito è data dal prodotto delle funzioni delle due celle, che si ottengono, considerandole come partitori, nella forma seguente: $H_1(s) = \tau_1 s/(1+\tau_1 s)$, $H_2(s) = 1/(1+\tau_2 s)$, avendo posto $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = R_2C_2$ (generalmente con $\tau_1 >> \tau_2$). Si ha pertanto

(61) $$H(s) = A\frac{\tau_1 s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} = \frac{A}{\tau_2}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

dove i poli sono

(62) $p_1 = -1/\tau_1$; $p_2 = -1/\tau_2$

La risposta indiciale si ottiene antitrasformando la funzione

(63) $$H_u(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{A}{\tau_2}\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

e dunque in base alla (58) si ha

(64) $h_u(t) = (U_1 \exp(p_1 t) + U_2 \exp(p_2 t))\, u(t)$

Applicando alla (63) i teoremi del valore iniziale e del valore finale si ricava che $h_u(0)$ e $h_u(\infty)$ sono nulli entrambi, in accordo col fatto che il circuito non trasmette nè la continua nè le frequenze più alte.

Calcoliamo ora i coefficienti U_1 e U_2 usando la formula (59)

(65) $$U_1 = \left[(s-p_1)H_u(s)\right]_{s=p_1} = \left[\frac{A}{\tau_2}\frac{1}{(s-p_2)}\right]_{s=p_1} = \frac{A\tau_1}{\tau_1-\tau_2}$$

(66) $$U_2 = \left[(s-p_2)H_u(s)\right]_{s=p_2} = \left[\frac{A}{\tau_2}\frac{1}{(s-p_1)}\right]_{s=p_2} = \frac{A\tau_1}{\tau_2-\tau_1}$$

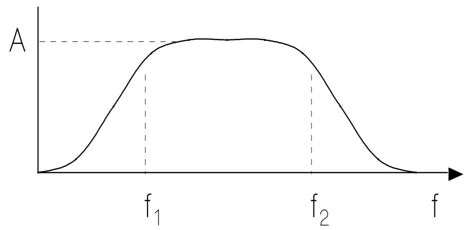
Sostituendo nella (64) si ha infine:

(67) $$h_u(t) = A\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}\left[\exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)\right]u(t)$$

La risposta in regime sinusoidale permanente si ottiene sostituendo s con jω nella funzione di trasferimento (61)

(68) $$H(j\omega) = A\frac{j\omega\tau_1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$

Si ha evidentemente H(0) = 0, H(∞) = 0, con il massimo di |H(jω)| a una frequenza intermedia o in tutta una regione di frequenze intermedie (dove allora |H(jω)| ≈ A) se $\tau_1 >> \tau_2$, come nel caso considerato nella figura. In queste condizioni le frequenze di taglio inferiore f_1 e superiore f_2 sono date dalle semplici espressioni



(69) $f_1 = 1/2\pi\tau_1$; $f_2 = 1/2\ \pi\tau_2$

Dalla (68) si ricava inoltre che in continua lo sfasamento è +π/2 (in anticipo), a frequenza infinita -π/2 (in ritardo).

8. Il metodo dello sviluppo in frazioni parziali

Un diverso approccio all'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di s consiste nello svilupparla preliminarmente in frazioni parziali, ottenendo così una somma di termini direttamente antitrasformabili. Se i poli della funzione sono tutti distinti si ha

(71) $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{s-p_i}$$

dove i coefficienti U_i (reali o complessi coniugati) si determinano imponendo l'eguaglianza fra i due membri della (71) per qualsiasi valore di s. Si ottiene così un sistema di n equazioni algebriche, ciascuna corrispondente a una diversa potenza di s, risolvendo il quale si ricavano appunto i coefficienti U_i.

Si può, in alternativa, calcolare i coefficienti U_i utilizzando la formula (59). Moltiplicando infatti la F(s) per il generico fattore $(s-p_i)$, dalla (71) si ha:

(72) $$F(s)(s-p_i) = \frac{N(s)(s-p_i)}{D(s)} = U_1 \frac{(s-p_i)}{(s-p_1)} + ... + U_i\ ... + U_n \frac{(s-p_i)}{(s-p_n)}$$

e ponendo infine $s = p_i$ si ottiene la (59).

Esempio. Il partitore RC.

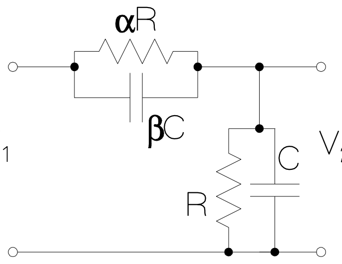
Il circuito mostrato nella figura prende il nome di partitore RC. Vogliamo calcolarne la risposta indiciale. Ponendo τ = RC e chiamando

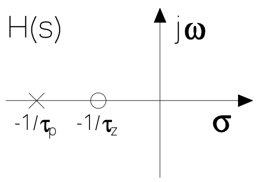
(73) $$Z_1(s) = \frac{\alpha R}{1+\alpha\beta\tau s} \qquad ; \qquad Z_2(s) = \frac{R}{1+\tau s}$$

le impedenze dei due rami, la funzione di trasferimento è

(74) $$H(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} = \frac{1}{1+\alpha}\;\frac{1+\alpha\beta\tau s}{1+\alpha\tau s(1+\beta)/(1+\alpha)}$$

Tale espressione possiede un polo e uno zero, entrambi reali. In essa individuiamo due costanti di tempo: la prima è $\tau_z = \alpha\beta\tau$, relativa allo zero z = $-1/\alpha\beta\tau$; la seconda è $\tau_p = \alpha(1+\beta)\tau/(1+\alpha)$, relativa al polo p = $-(1+\alpha)/\alpha(1+\beta)\tau$.





Dato che l'eccitazione è V_1 = 1/s, la trasformata dell'uscita corrispondente, la risposta indiciale del circuito, è

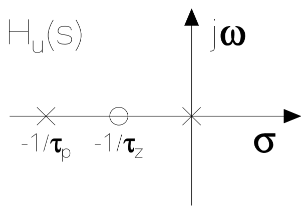
(76) $$V_2(s) = H_u(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{1+\alpha}\;\frac{1+\tau_z s}{s\left(1+\tau_p s\right)}$$

Questa funzione, in aggiunta alle singolarità della funzione di trasferimento del circuito, possiede un polo reale all'origine, relativo al segnale d'ingresso: si tratta di una frazione propria con m = 1 e n = 2. Riscrivendola in termini di poli e zeri, con

(77) $$z = -\frac{1}{\tau_z} = -\frac{1}{\alpha\beta\tau} \qquad ; \qquad p_1 = 0 \qquad ; \qquad p_2 = -\frac{1}{\tau_p} = -\frac{1+\alpha}{\alpha(1+\beta)\tau}$$

si ha

(78) $$H_u(s) = \frac{\beta}{1+\beta}\;\frac{s-z}{\left(s-p_1\right)\left(s-p_2\right)} = \frac{U_1}{s-p_1} + \frac{U_2}{s-p_2}$$



che rappresentiamo graficamente come mostrato nella figura.

Calcoliamo innanzitutto il valore iniziale e quello finale della risposta indiciale, applicando i teoremi (13) e (14).

$$\lim_{t \to 0} h_u(t) = \lim_{s \to \infty} H(s) = \frac{\beta}{1+\beta} \qquad ; \qquad \lim_{t \to \infty} h_u(t) = \lim_{s \to 0} H(s) = \frac{1}{1+\alpha}$$

Questi risultati s'interpretano considerando che la risposta del partitore ai tempi brevi (alle alte frequenze) è determinata dai condensatori, come se si avesse un partitore puramente capacitivo; mentre quella ai tempi lunghi (alle basse frequenze) è determinata invece dai resistori, come se si avesse un partitore puramente resistivo.

La (78) mostra che la funzione antitrasformata ha la forma

(79) $$h_u(t) = u(t)[U_1 \exp(p_1 t) + U_2 \exp(p_2 t)]$$

dove i coefficienti U_1 e U_2 si ottengono usando la formula (59) oppure risolvendo il sistema che si ottiene dalla (78). In quest'ultimo caso, moltiplicando ambo i membri della (78) per $(s - p_1)(s - p_2)$, si ha l'uguaglianza

$$\beta(s - z) = (1 + \beta)[U_1(s - p_2) + U_2(s - p_1)]$$

che deve essere verificata per qualsiasi valore di s. Sviluppandola, si ottiene

$$\beta s - \beta z = (1 + \beta)(U_1 s - U_1 p_2 + U_2 s - U_2 p_1)$$

per cui devono essere simultaneamente verificate le due uguaglianze

$$\beta s = (1 + \beta)(U_1 s + U_2 s) \qquad ; \qquad \beta z = (1 + \beta)(U_1 p_2 + U_2 p_1)$$

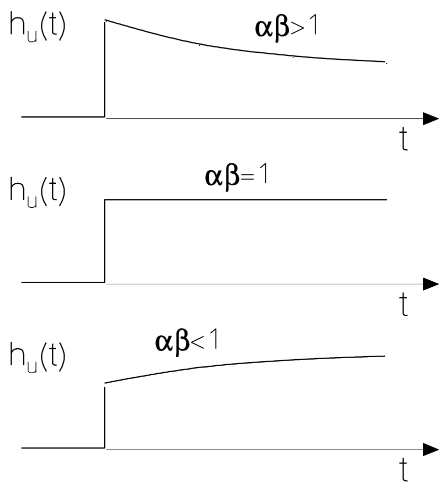
dalle quali si ricava

(80) $$U_1 = \frac{1}{1+\alpha} \qquad ; \qquad U_2 = \frac{\alpha\beta - 1}{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

Sostituendo nella (79) si ottiene infine l'espressione della risposta indiciale del partitore:

(81) $$h_u(t) = \frac{1}{1+\alpha}\left[1 + \frac{\alpha\beta - 1}{(1+\beta)} \exp\left[\frac{(1+\alpha)t}{\alpha(1+\beta)\tau}\right]\right] u(t)$$

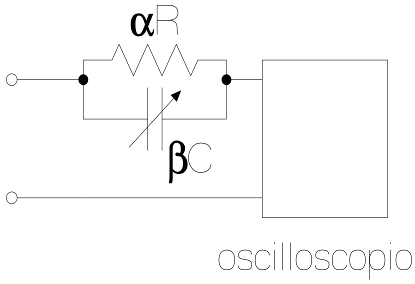
Questa funzione ha andamento esponenziale, che raccorda i valori iniziale e finale determinati prima. La sua forma, come è mostrato nella figura, dipende in modo sostanziale dai valori dei parametri del circuito, cioè a seconda che il prodotto $\alpha\beta$ sia maggiore, uguale o minore dell'unità (e conseguentemente il valore iniziale della funzione sia maggiore, uguale o minore di quello finale).



Un caso particolare molto interessante è quello per cui $\alpha\beta = 1$ e quindi la risposta indiciale è un gradino di tensione, cioè ha la stessa forma dell'eccitazione: conseguenza importantissima è che la risposta a qualsiasi segnale d'ingresso ne ha la stessa forma, a parte un fattore di scala. Il partitore RC si comporta allora come un circuito statico, sebbene contenga dei condensatori, cioè elementi dotati di memoria. In questo caso, infatti, si verifica il fenomeno della *cancellazione polo-zero*: dato che il polo p_2 e lo zero z assumono lo stesso valore, i termini che li rappresentano si elidono nella funzione di trasferimento H(s) che diventa indipendente da s, come per un circuito statico. Il circuito, in queste condizioni, prende il nome di **partitore compensato**.

Il partitore RC contiene due condensatori, e dunque in linea di principio ha due variabili di stato. Nel circuito considerato, tuttavia, queste due variabili, cioè le tensioni dei due condensatori, non sono controllabili indipendentemente da parte dell'ingresso, per come sono disposti i due elementi (essi sono in serie fra loro rispetto all'ingresso). Questo spiega perché nella relazione ingresso-uscita figura una sola variabile di stato. La conseguenza è che l'equazione differenziale del circuito è del primo ordine e corrispondentemente la sua funzione di trasferimento ha un solo polo. Anche questa variabile di stato svanisce, non vi sono più effetti di memoria e si ha formalmente il fenomeno della cancellazione polo-zero, quando $\alpha\beta = 1$. In tal caso i fattori di partizione del partitore capacitivo ($\beta/(1+\beta)$) e di quello resistivo ($1/(1+\alpha)$) diventano uguali fra loro, sicché la risposta ai tempi lunghi coincide con quella ai tempi brevi.

Esercizio. Il partitore RC esaminato nell'Esempio precedente trova numerosi impieghi ed è usato fra l'altro nelle sonde degli oscilloscopi. Queste sonde si usano per osservare un segnale perturbando il meno possibile il circuito in esame, cioè presentando ad esso elevata impedenza e in particolare bassa capacità: alquanto inferiore a quella che vedrebbe se l'ingresso dell'oscilloscopio venisse collegato direttamente ad esso (qualche decina di picofarad più la capacità del cavo di collegamento, cioè almeno altrettanto). Una tipica sonda attenuatrice, realizzata secondo il principio dell'attenuatore RC compensato, presenta un fattore di attenuazione pari a 1:10 e bassa capacità d'ingresso. La sonda comprende un resistore fisso e un condensatore regolabile (trimmer): quest'ultimo viene aggiustato in modo che un segnale a onda quadra applicato alla sonda venga osservato come tale sullo schermo dell'oscilloscopio. Lo schema del circuito è mostrato nella figura.



Progettare una sonda attenuatrice ad alta impedenza per un oscilloscopio con resistenza d'ingresso R = 1 MΩ e capacità d'ingresso totale (inclusa quella del cavo di collegamento alla sonda) compresa fra 60 e 80 pF, determinando i valori del resistore e del trimmer capacitivo.

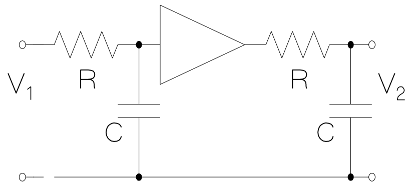
9. Le funzioni con poli multipli

Consideriamo ora l'antitrasformazione delle funzioni che possiedono poli multipli, esaminando per semplicità il caso di una funzione con un solo polo multiplo p_i, di molteplicità r. Lo sviluppo in frazioni parziali è il seguente, dove abbiamo trascurato i termini relativi agli altri poli:

(82) $$F(s) = ... + \frac{U_{i1}}{(s-p_i)} + \frac{U_{i2}}{(s-p_i)^2} + ... + \frac{U_{ir}}{(s-p_i)^r} + ...$$

Anche in questo caso i coefficienti $U_{i1},...,U_{ir}$ si calcolano risolvendo il sistema di equazioni che si ottiene moltiplicando ambo i membri della (82) per $(s-p_i)^r$ e imponendo poi l'uguaglianza per qualsiasi valore di s. Se la F(s) possiede un solo polo, che ha molteplicità r, si ottengono r equazioni negli r coefficienti incogniti (la prima relativa ai termini in s^0, la seconda a quelli in s, l'ultima relativa a quelli in s^{r-1}).

Esempio. Risposta indiciale di due celle RC disaccoppiate.



Consideriamo il circuito mostrato nella figura, costituito da due celle RC passabasso che supponiamo identiche fra loro e disaccoppiate da un amplificatore ideale con guadagno unitario (per ideale intendiamo qui un amplificatore dotato di guadagno reale indipendente dalla frequenza, impedenza d'ingresso infinita e impedenza d'uscita nulla). Vogliamo calcolare la risposta indiciale del circuito.

Dal momento che le due celle sono disaccoppiate, la funzione di trasferimento del circuito è data dal prodotto delle funzioni delle celle. Essendo queste uguali si ha, ponendo RC = τ, $H(s) = 1/(1+\tau s)^2$. La risposta indiciale si ottiene pertanto antitrasformando la funzione:

(83) $$H_u(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(1+\tau s)^2} = \frac{1}{\tau^2}\frac{1}{s(s-p)^2}$$

che è priva di zeri e possiede un polo all'origine, relativo al gradino d'ingresso, e un polo reale doppio con

(84) $$p = -1/\tau$$

Calcoliamo l'antitrasformata della (83) usando il metodo dello sviluppo in frazioni parziali. Sviluppandola si ha

(85) $$H_u(s) = \frac{U_1}{s} + \frac{U_{21}}{(s-p)} + \frac{U_{22}}{(s-p)^2}$$

L'antitrasformazione dei primi due termini è immediata; quella del terzo si ottiene ricordando la coppia (21), relativa a una rampa, e usando il teorema di traslazione nel campo complesso (17). Il risultato è

(86) $$h_u(t) = [U_1 + U_{21}\exp(pt) + U_{22}\, t \exp(pt)]u(t)$$

Moltiplicando per $s(s-p)^2$ ambo i membri della (85), con $H_u(s)$ data dalla (83), si ha

(87) $$1 = \tau^2[U_1 p^2 + s(-2U_1 p - U_{21} p + U_{22}) + s^2(U_1 + U_{21})$$

da cui si ottengono le seguenti tre equazioni nei coefficienti incogniti

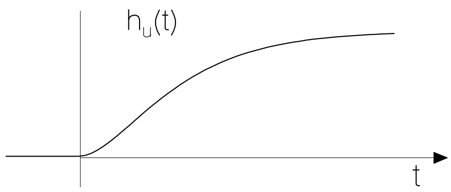
(88) $$\tau^2 U_1 p^2 = 1 \quad ; \quad -2U_1 p - U_{21} p + U_{22} = 0 \quad ; \quad U_1 + U_{21} = 0$$

Questi si ricavano risolvendole:

(89) $$U_1 = 1 \quad ; \quad U_{21} = -1 \quad ; \quad U_{22} = p = -1/\tau$$

Sostituendo nella (86) si ha infine:

(90) $$h_u(t) = [1 - \exp(-t/\tau) - (t/\tau)\exp(-t/\tau)]u(t)$$



il cui grafico è mostrato nella figura. Si noterà che la derivata della funzione nell'origine è nulla, perché ai tempi brevi il circuito si comporta come un doppio integratore. Infatti, sviluppando la (90) in serie per $t \ll \tau$ si ha: $h_u(t) \approx t^2/\tau^2$.

La risposta in regime sinusoidale permanente del circuito è $H(j\omega) = 1/(1+j\omega\tau)^2$. Si tratta dunque di un filtro passabasso con risposta unitaria in continua e modulo decrescente con la frequenza, nel diagramma di Bode, ma con pendenza doppia rispetto al caso di una sola cella RC: -40 dB/decade. La frequenza di taglio f_1 a –3 dB si trova imponendo $|H(j\omega_1)| = |H(j0)|/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$: $f_1 = 0{,}102.../\tau$. Lo sfasamento in continua è nullo; quello all'infinito $-\pi$, cioè doppio rispetto a quello di una singola cella RC.

10. Alcune note su zeri e poli

Dal momento che l'andamento temporale di una funzione del tempo dipende essenzialmente dalla natura dei poli della corrispondente funzione di s, ci può chiedere quale sia il ruolo svolto dagli zeri. La risposta è che essi influenzano fortemente i coefficienti (U_i) dei fattori esponenziali la cui sommatoria costituisce la funzione f(t).

Si nota, in particolare, che quando uno zero ha valore prossimo a quello di un polo, il coefficiente relativo a quel polo assume valori tanto più piccoli quanto minore è la distanza fra le due singolarità. Quanto si è detto è presto verificato esaminando la funzione

(91) $$F(s) = (s - z)/(s - p)$$

Trattandosi di una frazione impropria, esprimiamo la F(s) nella forma

(92) $$F(s) = 1 + (p - z)/(s - p)$$

la cui antitrasformata mostra appunto che l'ampiezza del termine esponenziale dipende dalla differenza p - z

(93) $$f(t) = \delta(t) + (p - z) \exp(pt)$$

Nel caso particolare in cui z = p si ha il fenomeno della cancellazione polo-zero. E’ chiaro che in un circuito fisico reale la cancellazione non si può mai verificare esattamente, ma è pure evidente che quando l'uguaglianza fra i valori di un polo e di uno zero è verificata almeno approssimativamente si manifesta un effetto di quasi annullamento (forte riduzione) dell'ampiezza del coefficiente del polo.

Un caso interessante è quello degli zeri che si trovano sull'asse immaginario. Perché allora la funzione, considerata nel dominio di ω, presenta antirisonanza alle frequenze degli zeri. In particolare, se una una funzione di trasferimento presenta una coppia di zeri immaginari, a quella frequenza la trasmissione si annulla (filtro eliminafrequenza o filtro notch); tali zeri si chiamano per questo "zeri di trasmissione".

Un altro problema riguarda la profonda diversità della forma delle funzioni del tempo corrispondenti a funzioni di s con poli distinti e poli multipli (e anche in questo caso è chiaro che in nessun circuito fisico reale i valori dei parametri potranno essere tali che due poli coincidano esattamente).

Considerando funzioni con due poli, nei due casi anzidetti si ha:

$$F(s)=\frac{1}{(s-p)^2} \qquad \leftrightarrow \qquad f(t)=t\exp(pt)$$

$$F'(s)=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)} \qquad \leftrightarrow \qquad f'(t)=\frac{\exp(p_1 t)}{p_1-p_2}+\frac{\exp(p_2 t)}{p_2-p_1}$$

Esaminiamo cosa avviene quando i due poli sono assai prossimi fra loro, ponendo $p_1 = p(1+\varepsilon)$ e $p_2 = p(1-\varepsilon)$ nella F'(s). Sostituendo p_1 e p_2 nella espressione della f'(t) e sviluppando in serie gli esponenziali si ha:

$$f'(\mathrm{t})=\frac{\exp(pt)}{2\varepsilon p}\left[\exp(\varepsilon pt)-\exp(-\varepsilon pt)\right]\approx\frac{\exp(pt)}{2\varepsilon p}\left[(1+\varepsilon pt)-(1-\varepsilon pt)\right]=t\exp(pt)$$

La f'(t) è dunque approssimativamente uguale alla f(t), a cui diventa uguale quando ε tende a zero.