

# **Temi di Fisica della Materia Condensata**

Roberto Car

Princeton University



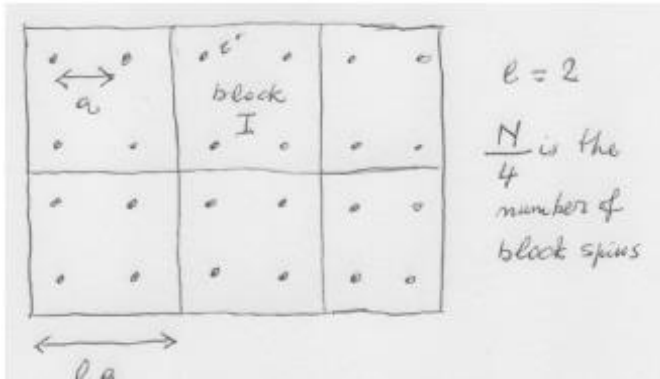
**Lezioni Cattedra Enrico Fermi**



*Marzo-Giugno 2017 – Dipartimento di Fisica G. Marconi*

# **Lezione 13-14: rinormalizzazione e fenomeni critici (2)**

# Trasformazioni di scala



$l$  e' il fattore di scala (qui  $l=2$ ). Dato che gli spin sono correlati su scale  $l a < \xi(t)$  essi agiscono come blocchi su tali scale. Correlazioni su scale sempre piu' grandi vengono campionate con applicazioni ripetute della trasformazione dei blocchi di spin (All'aumentare della dimensione del blocco la lunghezza di correlazione tra blocchi diminuisce)

$$-\mathcal{H} = K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + h \sum_i s_i \rightarrow \mathcal{H} = \sum_n K_n \Theta_n \{S\}$$

$\Theta_n$  sono funzioni dei gradi di liberta' microscopici ( $S$ )  
 Ad esempio, a lato,  $K_1 = K$ ,  $\Theta_1 = \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$ ,  $K_2 = h$ ,  $\Theta_2 = \sum_i s_i$

$$[K'] = R_l [K] \quad (l > 1)$$

$$N' = \frac{1}{l^d} N \quad \xi[K'] = \frac{1}{l} \xi[K] \quad \mathcal{H}_N \{[K], s_i\} \rightarrow \mathcal{H}_{N'} \{[K'], S_l\}$$

$$Z_{N'} [K'] = \text{Tr}_{\{S_l\}} e^{\mathcal{H}_{N'} \{[K'], S_l\}} = Z_N [K] = \text{Tr}_{\{s_i\}} e^{\mathcal{H}_N \{[K], s_i\}} \quad g[K'] = l^d g[K]$$

**Punto fisso**  $[K^*] = R_l [K^*] \quad \xi[K^*] = \frac{1}{l} \xi[K^*] \Rightarrow \xi[K^*] = 0 \text{ or } \xi[K^*] = \infty$

# Vettori, matrici, trasformazioni lineari

vettore:  $\mathbf{v} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$   $v_1$  e  $v_2$  sono le componenti di  $\mathbf{v}$  su due assi ortogonali

prodotto scalare:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$  norma (quadrato della lunghezza) di un vettore:  $\|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2$

matrice quadrata:  $\mathbf{M} \doteq \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$

prodotto matrice per vettore:  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \doteq \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + M_{12}v_2 \\ M_{21}v_1 + M_{22}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$  e' una trasformazione lineare;

le componenti di  $\mathbf{u}$  sono combinazioni lineari delle componenti di  $\mathbf{v}$

matrice simmetrica:  $M = \tilde{M}$  cioè:  $M_{ij} = M_{ji}$  autovalori e autovettori di una matrice simmetrica:

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_n = m_n \mathbf{a}_n$  ( $n = 1, 2$  per una matrice  $2 \times 2$ )

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{pmatrix} = m_n \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_l = \|\mathbf{a}_n\| \delta_{nl}$$

gli autovalori  $m_n$  sono numeri reali

Un vettore unitario  $\mathbf{e}$  ha norma  $\|\mathbf{e}\| = 1$ .

Utilizzando autovettori unitari si ha:  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_n = m_n \mathbf{e}_n$

# Trasformazioni RG linearizzate

In prossimità di un punto fisso, per piccoli spostamenti nello spazio delle costanti di accoppiamento, le trasformazioni RG possono essere linearizzate:

$$K' = R_l[K] \Rightarrow \delta K'_n = \sum_m M_{nm}^{(l)} \delta K_m$$

$$\delta K'_n \equiv K'_n - K_n^* \quad \delta K_n \equiv K_n - K_n^* \quad M_{nm}^{(l)} \equiv \frac{\partial K'_n}{\partial K_m}$$

In notazione compatta:  $\delta \mathbf{K}' = \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K}$

Se  $\mathbf{e}_p$  sono gli autovettori (normalizzati) di  $\mathbf{M}$  e  $\Lambda_p$  sono i corrispondenti autovalori

$$\mathbf{M}^{(l)} \mathbf{e}_p = \Lambda_p \mathbf{e}_p$$
$$\delta \mathbf{K}' = \sum_p a'_p \mathbf{e}_p \quad \delta \mathbf{K} = \sum_p a_p \mathbf{e}_p \quad \Rightarrow \quad a'_p = \Lambda_p a_p$$

La struttura iterativa (semi-gruppo) di  $R_l[\dots]$  ha come conseguenza che:

$\Lambda_p = l^{y_p}$  se  $y_p > 0$  la direzione  $\mathbf{e}_p$  è una direzione rilevante  
se  $y_p < 0$  la direzione  $\mathbf{e}_p$  è una direzione irrilevante  
se  $y_p = 0$  la direzione  $\mathbf{e}_p$  è una direzione marginale

# Comportamento critico

**Esempio:** ci sono due sole variabili rilevanti, la temperatura  $t$  e il campo magnetico  $h$ , e la matrice della trasformazione RG (linearizzata) e' diagonale.

$$g[K'] = l^d g[K] \quad \Rightarrow \quad f(t, h) = l^{-d} f(t', h')$$

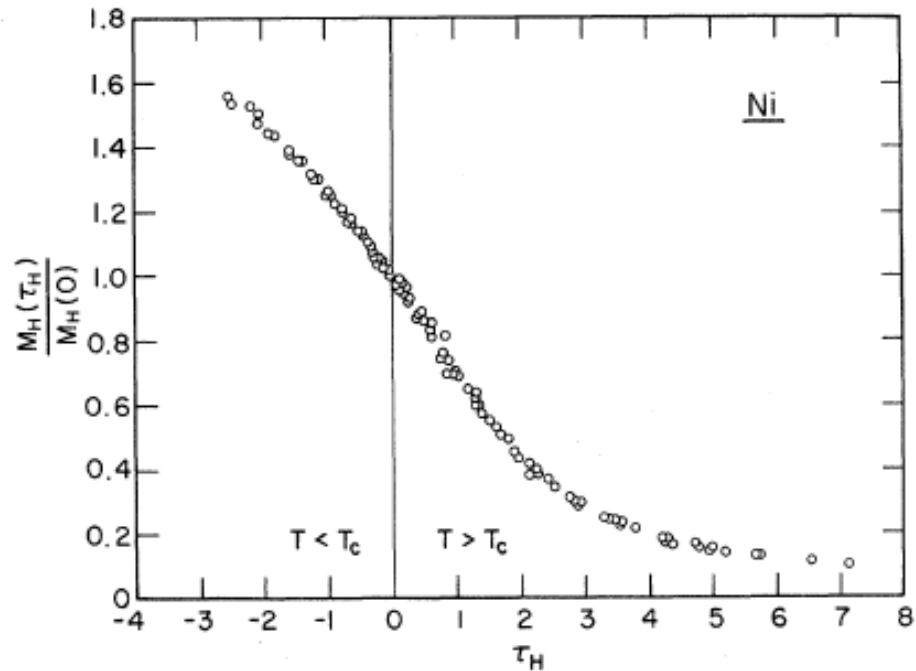
$$\begin{pmatrix} t' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_t^{(l)} & 0 \\ 0 & \Lambda_h^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix} \quad \Lambda_t^{(l)} = l^{y_t} \quad \Lambda_h^{(l)} = l^{y_h}$$

Iterando  $n$  volte:  $f(t, h) = l^{-nd} f(l^{ny_t} t, l^{ny_h} h)$

Ponendo:  $l^n = t^{-1/y_t}$  (sempre possibile dato che  $l$  e' arbitraria)

$$f(t, h) = t^{d/y_t} f\left(1, \frac{h}{t^{y_h/y_t}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(t, h)}{t^{d/y_t}} = f\left(1, \frac{h}{t^{y_h/y_t}}\right)$$

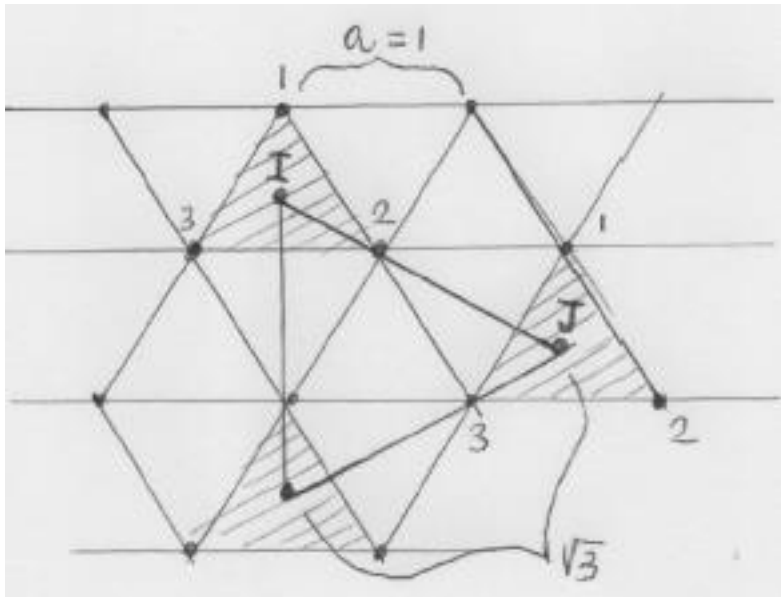
Ipotesi dello scaling statico (B. Widom, 1965): una funzione con queste proprieta' appartiene alla classe delle funzioni omogenee generalizzate



Un esempio di scaling statico. La figura mostra i dati sperimentali per la magnetizzazione (derivata dell'energia libera rispetto al campo magnetico) del Ni (ferromagnetico) in prossimità del punto critico, a diverse temperature e diversi campi magnetici esterni. La magnetizzazione  $M$  è una funzione di due variabili,  $h$  e  $t$ , quindi se i dati a diversi valori di  $h$  vengono graficati in funzione di  $t$  si ottengono diverse curve (ciascuna per un dato valore di  $h$ ) ma quando i dati per differenti valori di  $h$  e  $t$  sono rappresentati in termini di opportune variabili scalate essi collassano su un'unica curva.

# Un semplice calcolo RG in spazio reale: modello di Ising $2d$ ( $h = 0$ ) in un reticolo triangolare

$$\mathcal{H} = K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$$



Le placchette tratteggiate rappresentano i blocchi. I siti 1,2, 3 del reticolo originario appartengono al blocco  $I$ . Il reticolo dei blocchi è pure un reticolo triangolare (ruotato rispetto al reticolo originario) di costante reticolare  $\sqrt{3}$  mentre la costante reticolare del reticolo originario è 1. Il fattore di scala è  $l=\sqrt{3}$ .

L'insieme degli spin originari ( $s$ ) può essere suddiviso in gruppi di 3 spin in corrispondenza con uno spin di blocco ( $S$ ) definito da:

$$S_I = \text{sign}(s_1^I + s_2^I + s_3^I) = \pm 1$$



$$\sigma(S_I = +1) \equiv \{s_1^I s_2^I s_3^I\} = \begin{cases} +++ \\ ++- \\ +-+ \\ -++ \end{cases} \quad \text{e analogamente per } \sigma(S_I = -1)$$

$$e^{\mathcal{H}\{S_I\}} = \sum_I \sum_{\sigma(S_I)} e^{\mathcal{H}\{\sigma(S_I)\}}$$

Calcoliamo  $\mathcal{H}\{S_I\}$  in maniera approssimata con la procedura seguente:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} \quad \mathcal{H}_0 = K \sum_I \sum_{\langle i,j \rangle \in I} s_i s_j \quad \mathcal{V} = K \sum_{I \neq J} \sum_{\langle i \in I, j \in J \rangle} s_i s_j$$

Se trascuriamo l'effetto di  $\mathcal{V}$  abbiamo a che fare con un problema non-interagente (i blocchi sono disconnessi), che si risolve facilmente. Calcolare l'effetto di  $\mathcal{V}$  e' difficile (ma necessario). Qui ci limiteremo a una stima grossolana usando la teoria perturbativa al prim'ordine.

$$\sum_I \sum_{\sigma(S_I)} e^{\mathcal{H}_0\{\sigma(S_I)\}} = z_0(K)^M \quad M=N/3 \text{ e' il numero di placchette tratteggiate}$$

$$z_0(K) = \sum_{\sigma(S_I=+1)} e^{\mathcal{H}_0\{\sigma(S_I=+1)\}} = \sum_{\sigma(S_I=+1)} e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)} = 3e^{-K} + e^{3K} \quad \text{indipendente da } S_I$$

$$e^{\mathcal{H}'\{S_I\}} = \text{Tr}_{\{I,\sigma\}} [e^{\mathcal{H}_0 + \mathcal{V}}] = \frac{\text{Tr}_{\{I,\sigma\}} [e^{\mathcal{V}} e^{\mathcal{H}_0}]}{\text{Tr}_{\{I,\sigma\}} [e^{\mathcal{H}_0}]} = \langle e^{\mathcal{V}} \rangle_0 z_0(K)^M$$

Teoria perturbativa al primo ordine:  $\langle e^{\mathcal{V}} \rangle_0 = \langle 1 + \mathcal{V} \rangle_0 + O(\mathcal{V}^2) = e^{\langle \mathcal{V} \rangle_0} + O(\mathcal{V}^2)$

$$\Rightarrow \mathcal{H}'\{S_I\} = M \ln z_0(K) + \langle \mathcal{V} \rangle_0$$

$$\mathcal{V} = \sum_{I \neq J} \mathcal{V}_{IJ} \quad \mathcal{V}_{IJ} = K s_2^I (s_1^J + s_3^J) \quad \langle \mathcal{V}_{IJ} \rangle_0 = K (\langle s_2^I s_1^J \rangle_0 + \langle s_2^I s_3^J \rangle_0) = 2K \langle s_2^I s_1^J \rangle_0 = 2K \langle s_2^I \rangle_0 \langle s_1^J \rangle_0$$

$$\langle s_1^J \rangle_0 = \frac{1}{z_0} \sum_{\sigma(S_J)} s_1^J e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)} = S_J \frac{e^{-K} + e^{3K}}{3e^{-K} + e^{3K}} \quad \Phi(K) \equiv \frac{e^{-K} + e^{3K}}{3e^{-K} + e^{3K}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}'\{S_I\} = M \ln z_0(K) + 2K (\Phi(K))^2 \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J$$

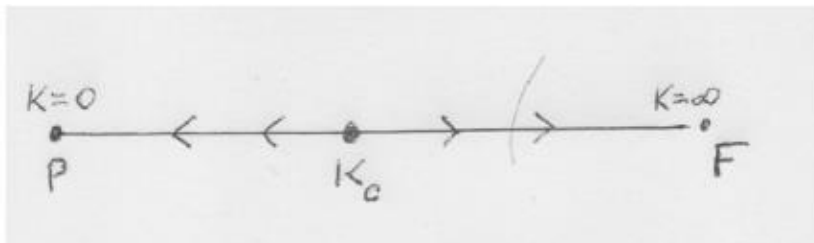
## Hamiltoniana rinormalizzata:

$$\mathcal{H}'\{S_I\} = M \ln z_0(K) + 2K(\Phi(K))^2 \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J = K'_0 + K' \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J$$

Il nuovo accoppiamento introdotto,  $K'_0$ , aggiunge un termine costante all'Hamiltoniana che altrimenti mantiene la forma originaria di Ising con una diversa costante di accoppiamento  $K'$ . Ordini successivi della teoria perturbativa introdurrebbero accoppiamenti al di là dei primi vicini.

$$K' = 2K(\Phi(K))^2 = K'[K] \quad \Rightarrow \quad K^* = 2K^*(\Phi(K^*))^2$$

**Punti fissi:**  $K^* = 0, K^* = \infty, \Phi(K^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow K_c \approx 0.34$



$$\Lambda_t = l^{y_t} = \left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K=K_c} \approx 1.62$$

Flusso RG

# Soluzione esatta, campo medio, nostro RG grossolano

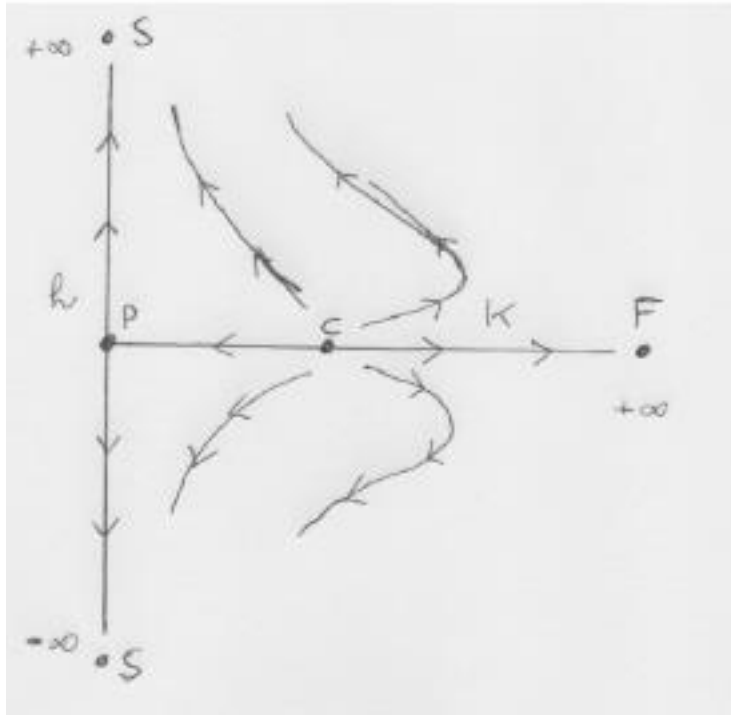
$T_c$  (nelle unita' in cui  $J/k_B = 1$ ): 3.7 (esatto), 6 (campo medio), 2.9 (nostro RG)

$\xi \sim |t|^{-\nu}$  per  $t \rightarrow 0^\pm$       Divergenza della lunghezza di correlazione

$\nu$ :      1 (esatto), 0.5 (campo medio), 1.14 (nostro RG)

Un calcolo RG meno grossolano, ad esempio usando la teoria perturbativa al secondo ordine per stimare le interazioni interblocchi darebbe risultati molto piu' vicini a quelli esatti

# Diagramma di flusso completo (in presenza di campo magnetico $h$ )



In aggiunta ai punti fissi trovati per  $h=0$ , e cioè  $F, C, P$ , compaiono due pozzi (sinks –  $S$ ) per le linee di flusso: che cosa rappresentano?

Il diagramma di flusso RG da' una rappresentazione completa del diagramma di fase termodinamico del sistema, nel nostro caso il modello di Ising  $2d$  su reticolo triangolare

L'asse orizzontale, indicato con  $h$ , e' in realta'

$$K_h = h/k_B T$$