Guido Corbò

Note di elettromagnetismo

Forza di Lorentz su un circuito arbitrario e correnti indotte

Consideriamo una spira di forma arbitraria che si muove in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$. Durante il moto, la forma e la lunghezza della spira possono variare a piacimento. È immediato constatare che si forma una forza elettromotrice f, dovuta alla forza di Lorentz. Vogliamo mostrare che vale la relazione

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

dove Φ è il flusso di $\boldsymbol{B}$ attraverso una qualsiasi superficie che ha come bordo la spira, *calcolato con un versore normale che segue la regola della vite rispetto al verso di percorrenza lungo il quale vogliamo calcolare la forza elettromotrice.* Quest'ultima è data da:

$$f = \oint \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \cdot \, d\boldsymbol{l} \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità che compete al tratto di filo $d\boldsymbol{l}$ (figura 1).

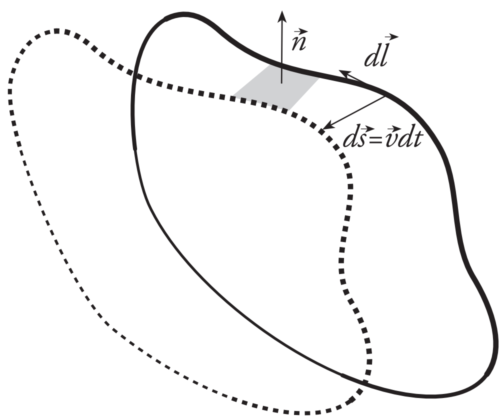

Figura 1: Una spira si muove (ed eventualmente si deforma) in un campo $\boldsymbol{B}$. La linea continua rappresenta la spira all'istante t e la linea tratteggiata rappresenta la spira che, all'istante $t + dt$, si è leggermente "avvicinata" all'osservatore.

Per cercare di rendere più chiaro l'aspetto tridimensionale del sistema che stiamo studiando, abbiamo disegnato con un tratto più marcato la parte della spira più vicina all'osservatore.

Procediamo nel modo seguente. Per le proprietà del prodotto misto possiamo scrivere anche così:

$$f = \oint d\boldsymbol{l} \ \wedge \boldsymbol{v} \ \cdot \boldsymbol{B} \tag{3}$$

ovvero

$$f \ dt = \oint d\boldsymbol{l} \ \wedge d\boldsymbol{s} \ \cdot \boldsymbol{B} \tag{4}$$

D'altra parte,

$$d\boldsymbol{l} \ \wedge d\boldsymbol{s} = d\sigma \ \boldsymbol{n}$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie (disegnato in grigio) del "cilindroide" formato dalla spira e dalla sua posizione all'istante infinitesimo successivo; e $\boldsymbol{n}$ è il suo versore normale che, nella situazione illustrata in figura 1, punta verso l'"esterno" del cilindroide stesso. Scriviamo dunque così la (4):

$$f \ dt = \int_{\Sigma} \boldsymbol{B} \ \cdot \ \boldsymbol{n} \ d\sigma \tag{5}$$

dove Σ è la superficie laterale complessiva del cilindroide.

Costruiamo adesso due superfici $S(t)$ ed $S(t+dt)$ che hanno come bordo la spira agli istanti t e $t+dt$ rispettivamente; con i loro versori normali (figura 2):

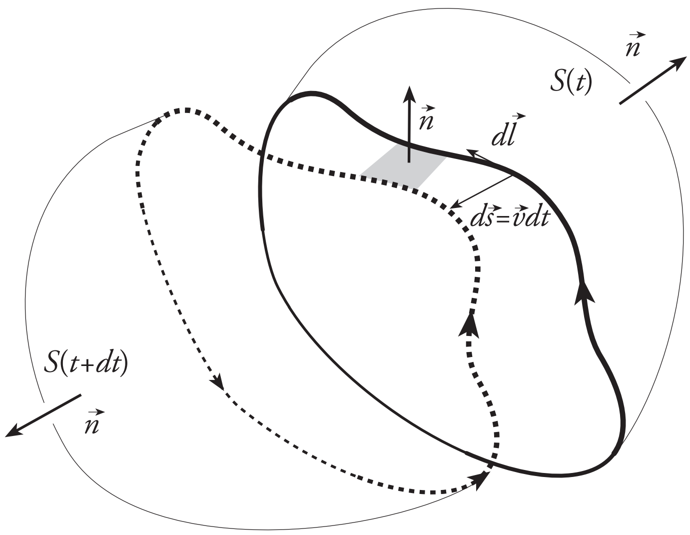

Figura 2: Costruiamo due superfici arbitrarie: $S(t)$ ha come bordo la spira all'istante t ed $S(t+dt)$ ha come bordo la spira all'istante $t+dt$.

Le due superfici $S(t)$ ed $S(t+dt)$, più la superficie laterale Σ del cilindroide, formano ora una superficie chiusa S. Il flusso Φ_S di $\boldsymbol{B}$ (entrante od uscente che sia) attraverso S deve essere nullo, ovvero:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_S = \Phi_{S(t)} + \Phi_{S(t+dt)} + \Phi_\Sigma \\ &= \int_{S(t)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_{S(t+dt)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \end{aligned} \tag{6}$$

Facciamo ora attenzione: il versore normale alla superficie $S(t+dt)$ segue la regola della vite rispetto al verso di percorrenza stabilito lungo la spira; diversamente dal versore normale alla superficie $S(t)$. Quindi, poiché vogliamo calcolare i flussi seguendo sempre la regola della vite, dobbiamo utilizzare per $S(t)$ un versore $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$, cioè *opposto* a quello indicato in figura. Dobbiamo scrivere dunque:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{S(t)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}'\, d\sigma + \int_{S(t+dt)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \\ &= -\Phi(t) + \Phi(t+dt) + f\ dt \end{aligned} \tag{7}$$

dove nell'ultimo addendo abbiamo tenuto conto della (5) ed abbiamo chiamato con $\Phi(t)$ e $\Phi(t+dt)$ i flussi attraverso le superfici, calcolati nei rispettivi istanti. Dalla (7) segue dunque che

$$f = -\frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt}$$

ovvero la (1) che volevamo dimostrare.

Guido Corbò

Note di elettromagnetismo

Soluzione delle equazioni di Maxwell

Si tratta di risolvere equazioni del tipo

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = s \tag{1}$$

Si verifica che la soluzione è:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{s(\boldsymbol{\xi}, t - r/c)}{r} d\tau \tag{2}$$

dove con $\boldsymbol{x}$ abbiamo indicato il vettore di componenti x, y e z:

$$\boldsymbol{x} \equiv (x, y, z)$$

e altrettanto

$$\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$$

r rappresenta la distanza di un punto generico nel campo da un punto nel quale è presente la sorgente:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \tag{3}$$

Esaminiamo l'azione delle derivate sulla funzione integranda:

$$\partial_i\ \frac{s}{r} = \frac{1}{r}\ \partial_i\ s + s\ \partial_i\ \frac{1}{r} = -\frac{1}{c}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial s}{\partial t}\ \partial_i r + s\ \partial_i\ \frac{1}{r} \tag{4}$$

Applichiamo ancora ∂_i e sommiamo sull'indice i ricordando che:

$$\partial_i r = \frac{r_i}{r}; \qquad \Delta r = \frac{2}{r}; \qquad \partial_i \frac{1}{r} = -\frac{r_i}{r^3} \tag{5}$$

Si ottiene

$$\Delta\frac{s}{r} = \frac{1}{c^2}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\ - \frac{1}{c}\ \frac{\partial s}{\partial t}\ \frac{2}{r^2} + \ \frac{1}{c}\ \frac{r_i}{r^3}\ \frac{r_i}{r}\ \frac{\partial s}{\partial t} + \ \frac{1}{c}\ \frac{\partial s}{\partial t}\ \frac{r_i}{r}\ \frac{r_i}{r^3} + s\ \Delta\frac{1}{r} \tag{6}$$

I tre addendi proporzionali a $1/c$ si cancellano e si ha infine:

$$\Delta\frac{s}{r} = \frac{1}{c^2}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + s\ \Delta\frac{1}{r} \tag{7}$$

Integrando in $d\tau$:

$$\Delta \int \frac{s}{r}\, d\tau = \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{s}{r}\, d\tau + \int s\ \Delta \frac{1}{r}\, d\tau \tag{8}$$

ovvero:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\boldsymbol{\xi}, t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|/c)\ \Delta_x \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau \tag{9}$$

Definiamo ora

$$A(\boldsymbol{x}, t, \widetilde{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{4\pi} \int s(\boldsymbol{\xi}, t - |\widetilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\xi}|/c)\ \Delta_x \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau \tag{10}$$

La funzione A evidentemente coincide con il secondo membro dell'equazione precedente quando $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Scriviamo intanto

$$A(\boldsymbol{x}, t, \widetilde{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{4\pi} \int s(\boldsymbol{\xi}, t - |\widetilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\xi}|/c)\ \Delta_x \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta_x \left(\frac{s(\boldsymbol{\xi}, t - |\widetilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\xi}|/c)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) d\tau \tag{11}$$

D'altra parte, vale l'identità generale

$$f(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta_x \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau \tag{12}$$

che si dimostra immediatamente dalla conoscenza della soluzione dell'equazione di Poisson; sappiamo infatti che

$$\Delta_x\ f(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

ha soluzione

$$f(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau \tag{14}$$

e applicando ad entrambi membri l'operatore Δ_x:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \Delta_x\ f(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta_x \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\, d\tau \tag{15}$$

Scriviamo allora

$$A(\boldsymbol{x}, t, \widetilde{\boldsymbol{x}}) = \ s(\boldsymbol{x}, t - |\widetilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}|/c) \tag{16}$$

D'altra parte, ricordiamo che il secondo membro dell'equazione di D'Alembert non omogenea è proprio $A(\boldsymbol{x}, t, \widetilde{\boldsymbol{x}})$ con $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. Quindi otteniamo

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = s(\boldsymbol{x}, t) \tag{17}$$

Guido Corbò

Note di elettromagnetismo

Deduzione della formula di Laplace

Vogliamo trovare la soluzione dell'equazione

$$rot\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} \tag{1}$$

con la condizione

$$div\ \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

Quest'ultima condizione permette di scrivere

$$\boldsymbol{B} = rot\ \boldsymbol{A} \tag{3}$$

quindi possiamo scrivere la (1) così:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{j} \tag{4}$$

D'altra parte, si può facilmente verificare la seguente identità, valida per per un arbitrario campo vettoriale $\boldsymbol{v}$:

$$rot\ rot\ \boldsymbol{v} = grad\ div\ \boldsymbol{v} - \Delta \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

Utilizzando questa identità per il campo $\boldsymbol{A}$, l'equazione (4) diventa dunque:

$$grad\ div\ \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{j} \tag{6}$$

Osserviamo che lo *stesso* campo $\boldsymbol{B}$ può essere descritto tanto dal potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ quanto dal potenziale vettore $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + grad\ f$, dove f è un campo scalare arbitrario, dal momento che $rot\ grad\ f = 0$. Questa libertà nella scelta di $\boldsymbol{A}$ consente di utilizzare un potenziale vettore $\boldsymbol{A}'$ per il quale

$$div\ \boldsymbol{A}' = 0. \tag{7}$$

Infatti, se partiamo da un potenziale vettore che ha divergenza diversa da zero, possiamo ricondurci ad un potenziale che ha divergenza zero se siamo in grado di trovare un campo scalare f per il quale

$$div\ (\boldsymbol{A} + grad\ f) = 0 \tag{8}$$

ovvero

$$div\ \boldsymbol{A} = -\Delta f \tag{9}$$

Ma riconosciamo nella (9) l'equazione di Poisson che, sappiamo, ammette soluzione. Quindi, senza perdita di generalità, l'equazione (6) si scrive:

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}. \tag{10}$$

Componente per componente la (10) equivale a tre equazioni di Poisson che sappiamo risolvere. In forma vettoriale:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int d\tau\ \frac{\boldsymbol{j}}{r}. \tag{11}$$

In modo più esplicito, per esempio per la componente x:

$$A_x(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int\ d\xi\ d\eta\ d\zeta\ \frac{j_x\ (\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \tag{12}$$

Abbiamo quindi risolto il problema di trovare il potenziale vettore, una volta assegnata la densità di corrente. Dal potenziale vettore, calcolando $rot\boldsymbol{A}$, otteniamo infine $\boldsymbol{B}$. Per avere un'espressione esplicita di $\boldsymbol{B}$, passiamo ad una notazione più conveniente. Precisamente, indichiamo con x_i $(i = 1, 2, 3)$ le coordinate x, y, z e analogamente, con ξ_i, le coordinate ξ, η, ζ. Nel loro complesso, chiameremo tali coordinate semplicemente con x e ξ rispettivamente. Altrettanto, v_i indicano le componenti di un generico vettore $\boldsymbol{v}$. Con questa notazione è molto semplice verificare che le componenti di un generico *prodotto vettoriale* $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ si scrivono così:

$$c_i = \varepsilon_{ijk}\ a_j\ b_k \tag{13}$$

dove ε è il tensore di Ricci (completamente antisimmetrico con $\varepsilon_{123} = 1$). In particolare, le componenti del *rotore* di un campo vettoriale sono:

$$(rot\ \boldsymbol{v}(x))_i = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j^x\ v_k \tag{14}$$

dal momento che l'operazione di rotore ha formalmente la struttura di un prodotto vettoriale. Per il campo $\boldsymbol{B}$ abbiamo dunque:

$$B_i = (rot\ \boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j^x\ A_k = \varepsilon_{ijk}\ \partial_j^x\ \frac{\mu}{4\pi} \int\ d\tau\ \frac{j_k\ (\xi)}{\sqrt{\sum_t (x_t - \xi_t)^2}} \tag{15}$$

Possiamo portare ∂_j^x sotto il segno di integrazione, poiché si tratta di una derivata parziale rispetto ad una delle variabili x, y, z (e non ξ, η, ζ rispetto alle quali stiamo integrando). Inoltre ∂_j^x passa attraverso j, che è funzione delle ξ. Si ha dunque:

$$B_i(x) = \varepsilon_{ijk} \frac{\mu}{4\pi} \int d\tau \; j_k \; (\xi) \; \partial_j^x \frac{1}{\sqrt{\sum_t (x_t - \xi_t)^2}} \tag{16}$$

Ricordiamo che

$$\partial_j^x \frac{1}{\sqrt{\sum_t (x_t - \xi_t)^2}} = -\frac{x_j - \xi_j}{r^3} \;\; = \; -\frac{r_j}{r^3} \tag{17}$$

Otteniamo allora:

$$B_i(x) = -\varepsilon_{ijk} \frac{\mu}{4\pi} \int d\tau \; \frac{r_j}{r^3} \; j_k(\xi) \tag{18}$$

cioè

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu}{4\pi} \int d\tau \; \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{j}}{r^3} = \frac{\mu}{4\pi} \int d\tau \; \frac{\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{19}$$

È utile avere un'espressione nella quale la densità di corrente è diversa da zero soltanto lungo un sottile tubo ed è ovunque diretta lungo il tubo stesso (come avviene quando un filo elettrico è percorso da corrente). In questo caso, possiamo considerare una sezione *ortogonale* del filo, di area $d\sigma$ (molto piccola ma in generale variabile lungo il filo stesso) con un versore normale che definisce *il verso di riferimento per il fluire della corrente elettrica.* Allora, il flusso di $\boldsymbol{j}$ (cioè l'intensità i della corrente elettrica) calcolato con tale normale risulta

$$i = \boldsymbol{j} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} \; d\sigma \tag{20}$$

Nelle condizioni nelle quali ci troviamo, possiamo invertire tale relazione, esprimendo la densità di corrente in funzione dell'intensità:

$$\boldsymbol{j} = \frac{i}{d\sigma} \; \widehat{\boldsymbol{n}} \tag{21}$$

Tornando all'espressione (19), vediamo che l'elemento di integrazione può essere espresso come

$$d\tau = dl \; d\sigma \tag{22}$$

dove dl è la lunghezza di un tratto infinitesimo di filo. Otteniamo dunque

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi} i \int \; dl \; \frac{\widehat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{23}$$

Abbiamo portato i fuori dall'integrale poiché, nelle condizioni stazionarie nelle quali ci troviamo, l'intensità di corrente ha un valore costante lungo tutto il filo.

A volte, si pone

$$d\boldsymbol{l} = dl \; \widehat{\boldsymbol{n}} \tag{24}$$

e quindi si trova scritta così quella che è chiamata *prima formula di Laplace*:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi} i \int \frac{d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{25}$$